LAS GEOMETRÍAS

Dr. Juan Pablo Pinasco
Dr. Pablo Amster
Dr. Nicolás Saintier
Lic. Santiago Laplagne
Inés Saltiva



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

LAS GEOMETRÍAS

Dr. Juan Pablo Pinasco, Dr. Pablo Amster,
Dr. Nicolás Saintier, Lic. Santiago Laplagne e Inés Saltiva

a u t o r i d a d e s

Ministerio de Educación.
Instituto Nacional de Educación Tecnológica.
Saavedra 789. C1229ACE.
Ciudad Autónoma de Buenos Aires.
República Argentina.
2009

LAS GEOMETRÍAS

Dr. Juan Pablo Pinasco
Dr. Pablo Amster
Dr. Nicolás Saintier
Lic. Santiago Laplagne
Inés Saltiva



Colección: LAS CIENCIAS NATURALES Y LA MATEMÁTICA

Colección “Las Ciencias Naturales y la Matemática”.
Director de la Colección: Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general de la Colección: Haydeé Noceti.

Industria Argentina

ISBN 978-950-00-0724-5

Director de la Colección:
Lic. Juan Manuel Kirschenbaum
Coordinadora general y académica de la Colección:
Prof. Ing. Haydeé Noceti
Diseño didáctico y corrección de estilo:
Lic. María Inés Narvaja
Ing. Alejandra Santos
Coordinación y producción gráfica:
Tomás Ahumada
Diseño gráfico:
Sebastián Kirschenbaum
Ilustraciones:
Diego Gonzalo Ferreyro
Federico Timerman
Retoques fotográficos:
Roberto Sobrado
Diseño de tapa:
Tomás Ahumada
Administración:
Cristina Caratozzolo
Néstor Hergenrether
Colaboración:
Téc. Op. en Psic. Soc. Cecilia L. Vazquez
Dra. Stella Maris Quiroga

Nuestro agradecimiento al personal del Centro Nacional de Educación Tecnológica por su colaboración.

Pinasco, Juan Pablo
Las geometrías / Juan Pablo Pinasco; Santiago Laplagne; Nicolás Saintier; dirigido por Juan Manuel Kirschenbaum.
- 1a ed. - Buenos Aires: Ministerio de Educación de la Nación. Instituto Nacional de Educación Tecnológica, 2009.
176 p. ; 24x19 cm. (Las ciencias naturales y la matemática / Juan Manuel Kirschenbaum.)

ISBN 978-950-00-0724-5

1. Geometría.
2. Enseñanza Secundaria.
I. Laplagne, Santiago
II. Saintier, Nicolás
III. Kirschenbaum, Juan Manuel, dir.
IV. Título

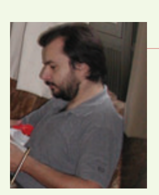
CDD 516.071 2

Fecha de catalogación: 27/08/2009

Impreso en Artes Gráficas Rioplatense S. A., Corrales 1393 (C1437GLE), Buenos Aires, Argentina.

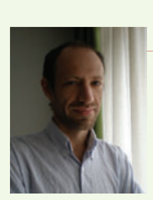
Tirada de esta edición: 100.000 ejemplares

Los Autores



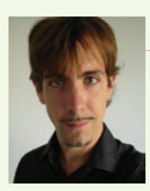
Dr. Juan Pablo Pinasco

Es Doctor en Matemática (UBA), Profesor Adjunto del Departamento de Matemática, FCEyN, UBA e Investigador del CONICET.
Publicó numerosos trabajos de investigación en problemas de autovalores de ecuaciones diferenciales, y ha participado en distintas actividades de divulgación.



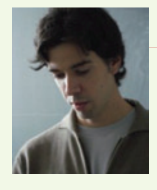
Dr. Pablo Amster

Es Doctor en Matemática (UBA), Profesor Adjunto del Departamento de Matemática, FCEyN, UBA e Investigador del CONICET.
Publicó numerosos trabajos de investigación, y colaboró en diferentes proyectos científicos en universidades argentinas y extranjeras. Ha dictado conferencias y seminarios de divulgación, y escribió diversos textos destinados al público no matemático.



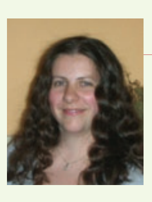
Dr. Nicolás Saintier

Es Doctor en Matemática (Paris 6, Francia), es Profesor Adjunto del Instituto de Ciencias de la Universidad Nacional de General Sarmiento, y del Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.
Publicó numerosos artículos de investigación en el área de ecuaciones diferenciales.



Lic. Santiago Laplagne

Es estudiante del Doctorado en Matemática (UBA) y becario de CONICET, se desempeña como Jefe de Trabajos Prácticos en el Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.



Inés Saltiva

Es estudiante de la Licenciatura en Matemática (UBA), y es Ayudante de Segunda del Ciclo Básico Común y del Departamento de Matemática, FCEyN, UBA.

ÍNDICE

Introducción

Juan Pablo Pinasco

La geometría es una de las ramas más antiguas de la matemática. Fue la primera en desarrollarse como un cuerpo teórico ordenado, con axiomas, teoremas, y demostraciones; este desarrollo fue imitado luego por el resto de las matemáticas. La propia geometría desarrolló sus propias ramas, y por ese motivo es difícil hablar hoy de una única geometría. Cada vez que las herramientas teóricas se demostraban insuficientes para resolver nuevos desafíos, distintos problemas prácticos motivaron el desarrollo de estas nuevas geometrías.

Por otra parte, muchas de estas ramas de la geometría fueron quedando obsoletas para las aplicaciones prácticas (aunque no como herramientas teóricas) ante el avance tecnológico. Para citar un ejemplo de gran importancia aún hoy día, pensemos en cómo determinar la ubicación de un barco en el océano. Después del descubrimiento de América este problema se transformó en el principal problema tecnológico relacionado con la navegación. Los barcos de la época eran capaces de atravesar el Atlántico, y por primera vez tenían necesidad de alejarse de la costa al navegar.

El primer obstáculo para ubicarse en mar abierto es la falta de puntos de referencia: sólo las estrellas están disponibles para intentar hacerlo. Las estrellas fueron utilizadas ya en la antigüedad, junto con argumentos de semejanza de triángulos y trigonometría, para resolver parcialmente el problema. Sin embargo, no son suficientes, también se hace necesario medir muy bien el tiempo, con mucha precisión. Los clásicos relojes de la Edad Antigua y la Edad Media (principalmente clepsidras y relojes de arena, que medían el tiempo en que tardaba en vaciarse un recipiente) no sirven en un barco debido al movimiento de las aguas; tampoco los relojes de péndulo posteriores, cuyo balanceo también se ve alterado. Por este motivo, para resolver el problema, durante los siglos XVI, XVII y XVIII se trabajó en mejorar los mapas y las cartas de navegación, los calendarios solares y lunares (para saber a qué hora debe aparecer un astro en determinado lugar, lo que permite ubicarse), y en el desarrollo de nuevos relojes.

Cada uno de estos problemas involucró nuevas herramientas matemáticas. En esa época surgieron la geometría proyectiva (impulsada por los pintores y arquitectos renacentistas), la geometría analítica (principalmente desarrollada por Fermat y Descartes), el análisis matemático (que permitió el estudio de curvas de manera analítica), y la geometría diferencial (si bien apareció a fines del siglo XVIII, fueron Cauchy, Gauss y Riemann en el XIX quienes la transformaron en una rama en sí misma).

Hoy día, el GPS (sistema de posicionamiento global) se encarga de resolver este problema de manera automática: una computadora calcula las distancias triangulando las señales intercambiadas entre el barco y distintos satélites. El funcionamiento del GPS se basa en los mismos principios de la geometría clásica utilizados al triangular posiciones basándonos en las estrellas u otros puntos de referencia; la principal diferencia es la precisión en los cálculos y la rapidez con que se los hace al estar automatizada la tarea, y si bien no necesitamos saber mucha geometría para utilizarlo, sí la necesitamos si queremos saber cómo funciona.

Planteo del Problema

¿Qué escribir, entonces, en un libro de geometría como éste? ¿Cómo mostrar su potencial para las aplicaciones y, a la vez, su importancia teórica? Hemos tratado de equilibrar ambos aspectos, proponiendo que resolvamos el siguiente problema:

Estimar las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

Vamos a hacer una serie de suposiciones para aclarar qué pretendemos medir. Supongamos que la Tierra gira en torno al Sol en una órbita circular, y que la Luna también se mueve en círculos en torno a la Tierra (sabemos, gracias a los avances astronómicos, que en realidad sus órbitas son elípticas, pero en una primera aproximación no lo vamos a tener en cuenta). Nos interesa calcular, aproximadamente, el radio de estas órbitas, que son las distancias a la Tierra:

- ***R*, distancia entre el Sol y la Tierra (radio de la órbita terrestre en torno al Sol)**
- ***r*, distancia entre la Luna y la Tierra (radio de la órbita lunar en torno a la Tierra)**

Además, vamos a suponer que el Sol, la Luna y la Tierra son esferas perfectas, y para conocer su tamaño necesitamos conocer el radio de estas esferas, o el diámetro (que es igual al doble del radio). Serán nuestras incógnitas, entonces,

- ***D*, diámetro del Sol**
- ***d*, diámetro de la Luna**

Señalemos también que estos cuerpos celestes no son esferas perfectas, aunque para nuestros objetivos no es importante. Por ejemplo, en el caso de la Tierra, el radio ecuatorial (la distancia medida desde el centro de la Tierra hasta un punto en el Ecuador) es de 6.378,1 km, mientras que el radio polar (la distancia entre el centro de la Tierra y uno de los polos) es de 6.356,8 km; la Tierra está achatada entre los polos unos 22 kilómetros, que pueden despreciarse sin ningún problema si nuestro objetivo es hacernos una idea aproximada del tamaño de la Tierra.

Muchas veces puede medirse el tamaño de un objeto o la distancia a la que está sin necesidad de recurrir a la geometría. En este caso, no podemos ir con

Planteo del Problema

una cinta métrica o una regla tratando de medir el diámetro lunar… mucho menos el del Sol. Sin embargo, veremos que es un problema que puede resolverse con muy pocas herramientas si empleamos distintos conceptos geométricos. Las primeras estimaciones de estos tamaños y de estas distancias se hicieron hace ya más de dos mil años, sin necesidad de telescopios, satélites, ni fotografías: simplemente observando con sus ojos, y utilizando modestos instrumentos como una regla y una plomada. Los cálculos se hacen hoy día de la misma forma para calcular la distancia a otras estrellas y a diferentes galaxias, sólo que se utilizan computadoras en vez de hacer las cuentas a mano, y se trabaja con señales de radiotelescopios y sobre fotografías satelitales. Pero los conceptos geométricos que se emplean no han variado.

Vamos a hacer una recorrida por distintas geometrías, recolectando estos conceptos que nos serán necesarios para la solución del mismo. Pero este problema no será la única motivación del libro: en cada capítulo veremos las ideas claves de distintas ramas de la geometría, junto con los teoremas y resultados centrales de cada una, sin descuidar sus demostraciones. Presentaremos también ejercicios y problemas particulares, que no siempre estarán conectados directamente con nuestro problema principal, pero que sirvan para extender o verificar que se han comprendido los resultados del texto.

La estructura del libro es la siguiente. En el primer capítulo haremos un breve recorrido por la historia de la geometría antes de Euclides, buscando su origen y los rastros de la misma en las primeras civilizaciones. El segundo capítulo presenta el sistema axiomático de la geometría euclidiana clásica, y los resultados de semejanza de triángulos. En el capítulo tres veremos los rudimentos de la trigonometría, y en el cuatro (escrito por Santiago Laplagne) diferentes aplicaciones teóricas y prácticas. El quinto capítulo (escrito por Nicolás Saintier) está dedicado a la geometría esférica, haciendo hincapié en la diferencia de trabajar sobre una superficie plana o una superficie curvada. En el sexto capítulo (escrito por Inés Saltiva) presentaremos la geometría proyectiva crítica para entender la perspectiva y cómo vemos las cosas. En el séptimo (escrito por Pablo Amster) introduciremos algunos conceptos topológicos y, finalmente, en el octavo capítulo resolveremos nuestro problema principal.

Capítulo 1

Los comienzos de la geometría

Juan Pablo Pinasco

1.1. Prehistoria

¿Cuándo comienza la geometría? ¿Dónde? ¿Cómo? Estas preguntas son difíciles de responder, tal vez sea imposible hacerlo. No importa cuánto nos remontemos en el tiempo, siempre vamos a hallar rastros de conocimientos geométricos en las civilizaciones más antiguas, incluso en las primeras tribus nómades.

Para obtener alimentos necesitaban moverse constantemente, ya sea siguiendo las migraciones animales, huyendo cuando en las temporadas de frío o lluvias la caza disminuía, o buscando nuevas fuentes de alimento cuando crecía la población. La necesidad de orientarse era primordial. ¿Hacia dónde ir para buscar agua? ¿De dónde vienen ciertas tormentas? ¿Cómo volver a una región donde la caza o la recolección de frutos fue favorable?

La regularidad del Sol en cada amanecer da una dirección privilegiada, un cierto eje a partir del cual señalar otras direcciones. Y para indicar estas otras direcciones, la noción de ángulo se vuelve completamente natural. Miles de años después el ángulo será definido como una medida de desviación respecto de una línea recta; pero el concepto en sí de ángulo, en aquel momento, tiene que haber estado presente.

La dirección sola no es suficiente para determinar posiciones, también es necesario conocer las distancias, y poseer instrumentos de medida. Sin dudas, nuestros antepasados comenzaron utilizando aquello que tenían más próximo: su propio cuerpo. Es cierto que no tenemos pruebas directas de esto, pero en la mayoría de las civilizaciones posteriores encontramos unidades de medida tales como la pulgada, la cuarta o palmo, el pie, el codo, la braza, entre otras. Las unidades de medida mencionadas no coinciden cuando se consideran distintos lugares (o épocas). Sin embargo, las diferencias son mínimas y, como en muchas actividades se las sigue utilizando (carpintería, mecánica, náutica), es bueno tener una idea aproximada de las mismas:

pulgada	**cuarta**	**pie**	**codo**	**braza**
2,54 cm	20,87 cm	30,48 cm	45 cm	1,65 m

Para distancias grandes, apelaron a un recurso que también se utiliza en nuestra época: indicar el *tiempo* (en días, o en meses -lunas-) de marcha necesarios para recorrerlas.

Ejercicio 1 | **¿Qué quiere decir que la distancia entre dos estrellas es cuatro años-luz?**

La punta de una flecha o el filo de un hacha contienen más conocimiento geométrico del que nos imaginamos. ¿Qué idea más primitiva de *punto* o de *recta* se nos ocurre? Tampoco es casual que las flechas y las lanzas sean rectas en lugar de curvas, o que los anzuelos y arpones más antiguos presenten dificultades para retirarlos una vez que la presa se enganchó en ellos.

Pero si nos parece que no estuvieron involucradas aquí nociones geométricas, y que estamos forzando a ver matemáticas en algo que por fuerza debía tener esa forma, mencionemos entonces un arma más "avanzada", el bumerang, conocido desde hace más de veinte mil años. El objetivo de un bumerang no es golpear a la presa, pues en este caso el arma caería junto con el animal en lugar de retornar a quien la lanzó; si quisiéramos golpearla sería más efectivo tirarle una lanza, flecha, o piedra. La idea es que el bumerang le llegue al animal cuando está haciendo su trayectoria hacia el lanzador, y que lo espante hacia él, para que pierda la noción de la dirección desde la que lo están atacando. Además, el ruido que produce al desplazarse es un factor importante de confusión, y sirve, por ejemplo, para desorientar a las aves de una bandada, forzándolas a bajar.

Diseñar las armas primitivas de esta manera significó una gran ventaja para nuestros antepasados, que les permitió alimentarse y sobrevivir. Desde ya, casi con toda seguridad, estos diseños fueron obtenidos por prueba y error, corregidos quién sabe cuántas veces antes de tomar una forma definitiva, que hoy nos parece casi única, ya que se repite en la mayoría de las civilizaciones conocidas.

Por otra parte, observamos también patrones geométricos en las piezas de alfarería, en la construcción de carpas y de chozas, y en sus adornos y motivos decorativos. Podemos afirmar que estos primeros grupos de seres humanos no habían tomado cursos de matemáticas ni nada que se le pareciera, y que todas estas nociones se transmitían oralmente en forma indirecta, ligadas a su utilidad inmediata, sin una reflexión sobre las ideas geométricas subyacentes. Pero este conocimiento de la geometría -impreciso, intuitivo, imperfecto- era el que introducía cambios y mejoras en las técnicas y herramientas que necesitaban para sobrevivir.

1.2. Egipto y Mesopotamia

Hace diez mil años distintas zonas del norte de África y Asia se volvieron desérticas. Las tribus que cazaban en estos territorios tuvieron problemas para conseguir agua y comida, y se vieron obligadas a mantenerse cerca de los grandes ríos. El Nilo en Egipto, el Tigris y el Éufrates en Babilonia, fueron los testigos de uno de los mayores cambios en la historia de la humanidad: las tribus se vuelven sedentarias, construyen ciudades, domestican animales, y nace la agricultura.

Si bien esto resolvía el problema de la alimentación, aparecieron nuevos problemas. No se podían esquivar los cambios de estación o las inundaciones emigrando; había que predecir las temporadas apropiadas para la siembra; había que redefinir los roles de cada uno en las nuevas sociedades, repartir bienes y tierras (ya sea para su posesión, o para el trabajo). El hombre necesitaría mayor precisión en la medición del tiempo, de las distancias, de las áreas, y de los volúmenes.

Así como en el período anterior las nociones geométricas aparecen en forma vaga o imprecisa, en éste la geometría toma un aspecto más familiar. Estas civilizaciones utilizaron fórmulas para el cálculo de áreas de figuras rectangulares y triangulares, aparecieron aproximaciones para el área de un círculo, en Egipto se obtuvo la fórmula que da el volumen del tronco de una pirámide.

Para la medición del tiempo durante el día, construyeron relojes de sol, que utilizaban para anticipar la llegada de las estaciones del año y conocer su duración. Estudiaron las constelaciones y trazaron el recorrido aparente del Sol a través del zodíaco (desde ya, que hoy sabemos que no es el Sol quien se mueve, pero desde nuestra perspectiva terrestre, es más sencillo describirlo así).

La división del círculo en 360 grados se relaciona con los primeros calendarios, si bien pronto notaron que el año debía tener poco más de 365 días.

En Egipto aparecen los *arpedonaptas* o "tiradores de cuerdas", primeros agrimensores que utilizaban cuerdas como reglas, compás y escuadra. Con ellas podían medir distancias, trazar rectas perpendiculares, y dibujar círculos. Esto señala un doble progreso de la geometría: primero, la introducción de instrumentos (la utilización tanto de la regla como del compás se derivan directamente del uso de las cuerdas), segundo, el reconocimiento de su importancia, al punto de justificar la existencia de una nueva profesión basada en ella.

Los conocimientos matemáticos de estas culturas nos han llegado por caminos muy diferentes. En el caso de los egipcios, se conservaron papiros en buen estado en las pirámides. Los más famosos son los papiros de Moscú y Rhind. El primero contiene la fórmula para el volumen del tronco de una pirámide, y el segundo se sabe que fue escrito aproximadamente en el año 1650 a.C., si bien el escriba (llamado Ahmes) aclara que está copiando un texto escrito doscientos años antes. Los textos babilónicos que se conservaron y conocemos se encuentran escritos en tabletas de arcilla entre los años 1900 y 1600 a.C.

1.3. Thales

El siguiente gran avance en la geometría se lo debemos a los griegos. Con ellos, deja de ser una actividad empírica, y desarrolla un sistema de reglas propias, muchas veces innecesariamente restrictivas desde el punto de vista de las aplicaciones. Son muchos los nombres involucrados en esta construcción, y la colección de procedimientos y resulta-

dos prácticos utilizados para calcular áreas y longitudes se transforma en un edificio teórico organizado deductivamente. Los cimientos son unos pocos axiomas asumidos como válidos, junto con algunas definiciones.

Los griegos construyen una nueva forma de hacer matemáticas, sin estar pendientes de las aplicaciones inmediatas. Pero no vayamos a creer que éste fue un mero juego teórico sin consecuencias reales: Thales, alrededor del año 600 a.C., calcula la altura de las pirámides egipcias y también predice eclipses; Eratóstenes (276-194 a.C.) calcula el radio terrestre con gran precisión, e incluso estima la distancia al Sol y a la Luna; podríamos dedicar un libro completo a los inventos de Arquímedes (287-212 a.C.) y al papel que jugaron en la guerra entre Roma y Cártago, cuando trabajó en la defensa de Siracusa, la isla donde vivía.

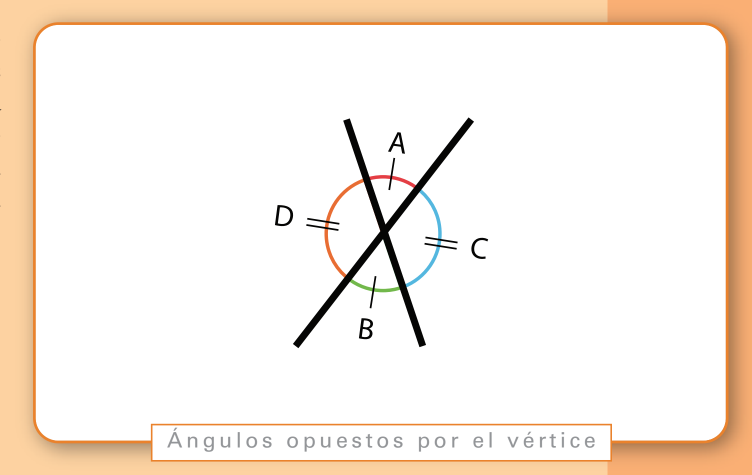
Podemos ver un ejemplo particular del valor de esta abstracción en la obra de Apolonio (262-190 a.C.), que estudió las secciones cónicas. Las curvas -que bautizó elipses, parábolas e hipérbolas- no parecían tener ninguna utilidad especial, pero en 1609 Kepler encontró que el movimiento de los planetas no era circular, sino que recorrían elipses en torno al Sol. Veinte años después, Galileo afirmaría que un objeto arrojado por el aire describía una parábola. A fines del siglo XVII Newton postula la Ley de Gravitación Universal, y deduce que las únicas órbitas posibles para el movimiento de los objetos celestes eran, precisamente, estas tres curvas (que la misma ley de gravitación sea válida para la caída de objetos en la superficie terrestre explica el tiro parabólico hallado por Galileo; las hipérbolas son más raras de observar, pero se sabe de cometas que siguieron órbitas de esa clase). Hoy en día se siguen utilizando las parábolas en el diseño de antenas satelitales, o en la óptica de un automóvil o una linterna.

Thales es el primer matemático a quien se le atribuye una serie de resultados teóricos generales, es decir, de teoremas. Si bien no se sabe cómo los demostró originalmente, hoy son parte de la geometría básica:

- **Los ángulos opuestos por el vértice son iguales.**
- **Dadas dos paralelas y una transversal, los ángulos alternos internos son congruentes.**
- **Un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales.**
- **Los ángulos de la base de un triángulo isósceles son congruentes.**
- **Un ángulo inscripto en una semicircunferencia es un ángulo recto.**

Volveremos más adelante a estos teoremas, pero hagamos rápidamente algunos comentarios sobre los dos primeros.

En el caso del teorema de los ángulos opuestos por el vértice, podemos pensar que tenemos dibujada una letra X, como en la figura, y el teorema afirma que los ángulos *A* y *B* son congruentes entre sí (y también son congruentes entre sí *C* y *D*).



Ángulos opuestos por el vértice

La demostración de este teorema no es muy complicada:

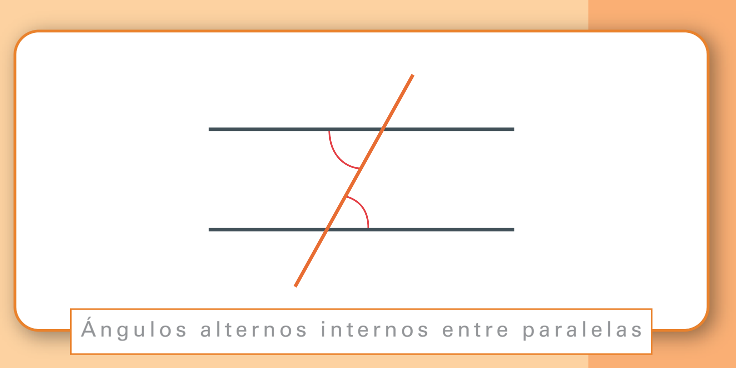
Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. [En la figura anterior, los ángulos A y B son congruentes.]

Demostración

Observemos que los ángulos *A* y *C* son adyacentes, forman un ángulo llano (esto es, suman en total 180°, dos rectos). Pero también son adyacentes *B* y *C*. Entonces, los ángulos *A* y *B* deben ser congruentes, ya que se los obtiene a ambos restando el ángulo *C* a un ángulo llano.

Veamos ahora el segundo. Cuando cortamos dos paralelas con una transversal, se forman en total ocho ángulos, pero sólo hay dos que son esencialmente distintos. El teorema anterior nos dice que en la intersección de la transversal con la primera paralela hay dos pares de ángulos que son iguales entre sí, este teorema nos dice que además estos ángulos se repiten en la intersección de la transversal con la segunda paralela. En la imagen, está marcado un par de ángulos alternos internos.


Ángulos alternos internos entre paralelas

Si deslizáramos una paralela sobre la otra, desplazándola a lo largo de la transversal hasta hacer coincidir los dos cruces, vemos que los ángulos marcados se transformarían en ángulos opuestos por el vértice, y el primer teorema nos garantizaría la congruencia.

No es la única forma de razonar sobre este teorema. Por ejemplo, vemos una letra zeta, y no importa de qué lado de la hoja estemos, nos parece idéntica. También, si la podemos girar, coincide con sí misma, y no queda otra opción: los ángulos deben ser iguales. Este tipo de argumentos aprovecha la simetría de la figura.

Lamentablemente, éstas no serían demostraciones del teorema, y para obtener una demostración rigurosa necesitaremos acudir al famoso quinto postulado de Euclides:

Postulado V

Si una línea recta corta a otras dos, y si de un lado de ella la suma de los ángulos interiores que produce con las otras dos es menor a dos rectos, al prolongar las otras dos rectas sólo se cortarán de ese lado.

Como vemos, no es un postulado sencillo. Necesitamos también una definición de rectas paralelas, y vamos a recurrir también a la que Euclides daría en su libro unos trescientos años después:

Definición XXIII

Rectas paralelas son aquellas que no se cortan si son prolongadas en cualquier dirección.

Con estas definiciones, estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema:

Teorema

Los ángulos internos entre paralalelas son congruentes.

Demostración

Supongamos que los ángulos A y A' en la figura no son congruentes.

Entonces, uno debe ser mayor que el otro, supongamos que el ángulo A es mayor que A'.

Ahora, el ángulo B sumado con el ángulo A nos dan 180°, dos rectos. Pero entonces, como A' es menor que A, los ángulos B y A' suman menos de dos rectos. Por el quinto postulado, si prolongamos ambas rectas de ese lado, deben cortarse, pero esto es una contradicción con el hecho de que las rectas son paralelas y de que no se cortan.

Si el ángulo A fuera menor que A', haríamos un razonamiento similar prolongando las rectas del otro lado, con lo cual descartaríamos también este caso. Luego, la única posibilidad que nos queda es que los ángulos sean congruentes.

Observación: Esta demostración es un ejemplo de *demostración por reducción al absurdo*. Conviene repasarla hasta estar seguros de haber entendido cómo funciona y qué es lo que hicimos.

Notemos que, antes de la demostración rigurosa del Teorema vimos argumentos basados en la idea de simetría, que no están autorizados en el marco de la geometría

euclidiana clásica. Por ejemplo, deslizar una paralela a lo largo de la transversal sobre la otra es una operación que no está permitida. Tampoco lo están la rotación, o el desplazamiento, que consideramos al pensar los ángulos alternos internos como los ángulos de una letra zeta. No es posible levantar una figura y superponerla sobre otra, o trasladarla. Este tipo de operaciones, que haríamos en la práctica (rotar una figura, moverla), está excluido y es reemplazado por construcciones. Si queremos una figura igual a una dada, en otro lugar o en otra posición, debemos ser capaces de construirla. No podemos levantarla y colocarla donde deseemos. Además, las construcciones están severamente limitadas al uso de la regla y el compás. La regla no se debe entender como una herramienta para medir distancias, ya que no está numerada como las reglas habituales, ni tampoco podemos hacer marcas en ella.

Por suerte, esta clase de argumentos basados en ideas de simetría y en movimientos no han sido descartados, sino que forman parte de desarrollos matemáticos más modernos. A fines del siglo XIX, los matemáticos Lie y Klein propusieron construir diferentes geometrías que respetaran determinadas propiedades de invariancia, o que tuviesen ciertos grupos de simetrías. No vamos a entrar en detalles al respecto en este libro, porque requiere de matemáticas muy avanzadas, pero veremos ejemplos sencillos de estas ideas fundamentales.

Podríamos hacer una representación de los ángulos alternos internos entre paralelas dibujando una letra Z. ¿Qué otra letra nos serviría? | **Ejercicio 2**

Supongamos que en la base de un triángulo se tienen dos ángulos cuya suma es mayor a dos rectos. ¿Cómo contradice esto al Postulado V? | **Ejercicio 3**

1.4. Pitágoras

El siguiente matemático que ocupa un lugar destacado en la historia es Pitágoras. Nació en la isla de Samos aproximadamente en el año 570 a.C. Su padre era mercader, y viajó con él por distintos lugares. A los veinte años conoció a Thales en Mileto, quien le habría recomendado estudiar en Egipto. Se encontraba en este país cuando fue invadido por los persas, quienes lo tomaron prisionero y lo llevaron a Babilonia, pero allí continuó sus estudios y se cree que incluso viajó a la India. Alrededor del año 520 a.C. regresó a Grecia, y se instaló posteriormente en Crotona, al sur de Italia.

Al margen de sus resultados matemáticos, Pitágoras fue el fundador de una de las primeras escuelas filosóficas de las que se tiene noticia. Se la ha denominado “hermandad”, e incluso “secta”, por el fuerte componente místico que tenía, sus miembros estaban obligados a seguir distintas reglas. Sus descubrimientos eran comunes, con lo cual se hace difícil determinar cuáles debemos al propio Pitágoras y cuáles a sus seguidores, pero sí podemos atribuirle a él la idea de pensar en los conceptos matemáticos en sí mismos: la noción abstracta de demostración, o el significado de conceptos matemáticos

aparentemente tan sencillos como el de triángulo o el de número.

La figura de Pitágoras en los comienzos de la matemática es central por haber relacionado, en cierto modo, los problemas aritméticos que dependen de números con los problemas geométricos relacionados con figuras. Si hasta ese momento los números eran un instrumento para contar o para medir, después de Pitágoras el concepto de número se verá ampliado al introducir los números irracionales, aquellos que no podían describirse como el cociente (o razón) de dos números enteros.

Además de la existencia de estos números (un resultado fuertemente geométrico, como veremos), hay otros dos resultados importantes que debemos a Pitágoras o a su escuela: el valor de la suma de los ángulos interiores de un polígono, y el famoso Teorema de Pitágoras. Veamos estos resultados en detalle.

1.4.1. Ángulos interiores de un polígono

Tomemos un triángulo cualquiera. En principio, es poco lo que podemos decir de sus tres ángulos: cada uno de ellos puede variar desde unos pocos grados hasta casi dos rectos. Sin embargo, si lo pensamos un poco, nos podemos convencer de que no puede tener dos ángulos que midan más de 90° cada uno. Esto es una consecuencia directa del quinto postulado que mencionamos anteriormente.

Si ordenamos lo anterior, tenemos que en un triángulo: a) un único ángulo no puede superar los 180°; b) dos ángulos cualesquiera, sumados, tampoco pueden superar los 180°. ¿Qué podemos decir de los tres ángulos? Sorprendentemente, el teorema es muy preciso:

Teorema | *En todo triángulo, la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos..*

Demostración | La demostración se obtiene razonando con la ayuda de la siguiente figura. Por el vértice *A* del triángulo, trazamos una recta *DE* paralela al lado *BC*. Ahora, el resto es aprovechar el teorema de Thales demostrado en la sección anterior.

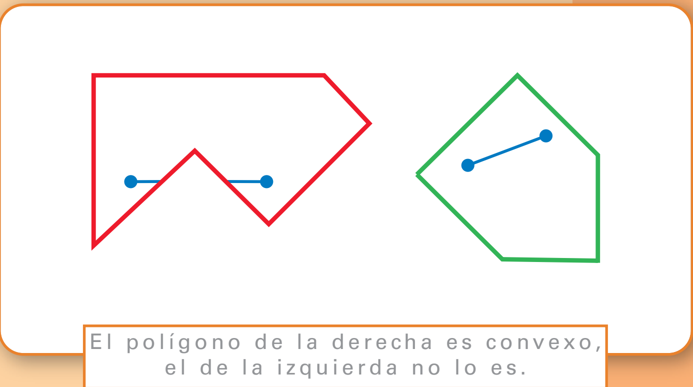
Si observamos la Z que se forma al pasar por los puntos *DABC*, vemos que los ángulos *DAB* y *ABC* son iguales por ser alternos internos entre paralelas. Por el mismo motivo, considerando *EACB*, tenemos que los ángulos *EAC y ACB* son congruentes.

Ángulos internos de un triángulo

Pero el ángulo llano *DAE*, que tiene 180°, está dividido en tres ángulos: *DAB* (congruente a *ABC*), *BAC* (congruente a sí mismo, *BAC*), y *EAC* (congruente a *ACB*). Luego, los tres ángulos internos del triángulo suman también 180°.

Sabemos ahora cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo. ¿Qué podemos decir de una figura con más lados, es decir, de un polígono? Vamos a poner algunas restricciones, si bien existen resultados más generales.

Un polígono de *n* lados tendrá *n* vértices, y pediremos que los ángulos interiores sean todos menores a dos rectos, es decir, 180°. Esta clase de polígonos son *convexos*, pues cumplen una propiedad geométrica muy sencilla e importante: todo par de puntos de su interior (o del borde) pueden conectarse con un segmento que cae totalmente dentro del polígono.



El polígono de la derecha es convexo, el de la izquierda no lo es.

Si pensamos en el más simple que se nos ocurre después del triángulo, un cuadrado, podemos ver que sus ángulos suman 360°, ya que tiene cuatro ángulos rectos. Luego, si hay un valor para la suma de los ángulos de un cuadrilátero, tenemos un candidato: debe ser 360°, pues es lo que vale en un cuadrado.

Ésta es una forma habitual de obtener generalizaciones en matemáticas: si deseamos una fórmula que se aplique a distintos casos, la calculamos en algunos casos particulares sencillos dado que debe ser válida también para ellos.

Ahora estamos en condiciones de enunciar y demostrar el teorema.

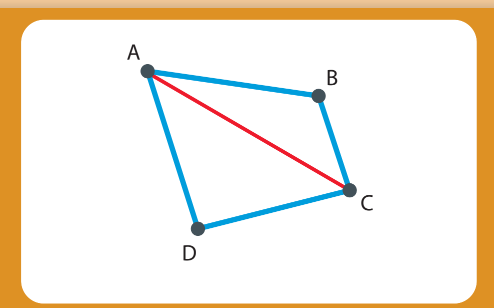
Teorema

En todo cuadrilátero convexo, la suma de los ángulos interiores es igual a 360°.



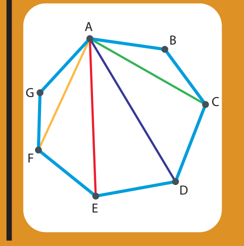
Demostración

Tomemos el vértice *A* y tracemos una diagonal conectándolo con el vértice *C*.



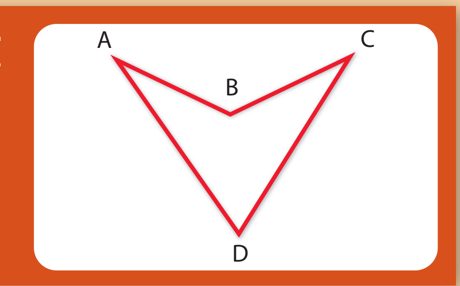
La figura nos queda dividida en dos triángulos, *ABC* y *CDA*. En cada uno de ellos, la suma de los ángulos interiores vale 180°, con lo cual la suma de los ángulos del cuadrilátero resulta ser 2 x 180° = 360°

Observación:
Con la idea de la demostración anterior podemos deducir una fórmula general para un polígono convexo de N lados. La idea para obtenerla será fijar un vértice, y trazar desde él todas las diagonales posibles (serán en total N – 3 diagonales, ya que no podemos conectarlo a sí mismo o a los dos vértices que están a su lado). Quedarán formados entonces N – 2 triángulos (cuando trazamos la última diagonal, dividimos la región que queda en dos triángulos), y cada uno aportará 180°. Luego, la suma de los ángulos interiores de un polígono convexo de N lados será (N – 2) x 180°

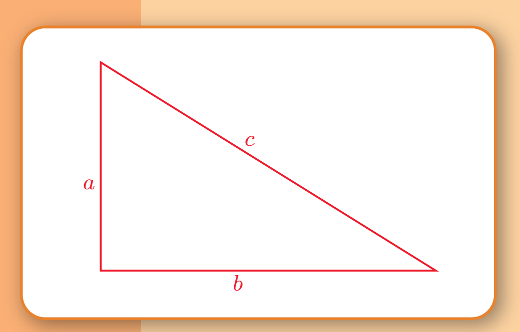


Ejercicio 4

El siguiente cuadrilátero no es convexo. ¿Cómo se demuestra que sus ángulos interiores también suman 360°?



1.4.2. El teorema de Pitágoras.



Hemos visto que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°. Nada impide, entonces, que uno de sus ángulos sea recto y mida exactamente 90°. Se llama *triángulos rectángulos* precisamente a aquellos que poseen un ángulo recto. También sus lados reciben nombres especiales.

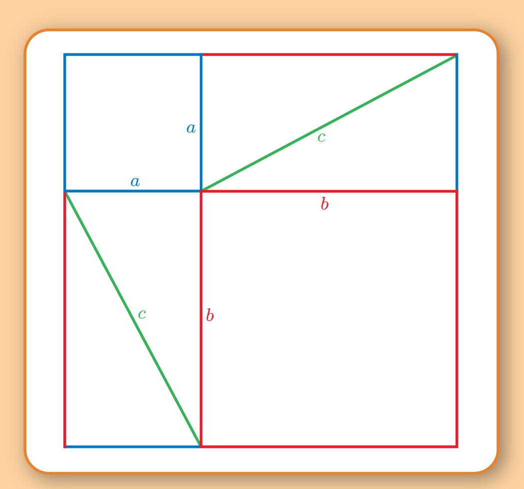
Los lados que forman el ángulo recto son llamados *catetos*, y el lado opuesto al ángulo recto se llama *hipotenusa*.

El teorema de Pitágoras enuncia una relación entre las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo. Si llamamos a y b a las longitudes de los catetos, y c a la longitud de la hipotenusa, tenemos

$$a^2 + b^2 = c^2$$

que se suele enunciar como: ”la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa”, sobreentendiendo que en realidad hablamos de sus longitudes.

Existen miles (no, ¡no estamos exagerando!) de demostraciones diferentes del teorema de Pitágoras, e incluso en *Los Elementos* de Euclides aparecen dos demostraciones distintas. Uno podría pensar que con una demostración es suficiente para convencernos de su validez, y así es, pero esta búsqueda revela la fascinación que ejerce el teorema, al conectar una propiedad geométrica con otra de tipo aritmética.



La demostración que veremos a continuación es una de las más sencillas, una

verdadera demostración visual, fácil de recordar, y que nos convencerá de la validez del teorema.

En el gráfico de la página anterior vemos un cuadrado de lado $a + b$, donde hay cuatro triángulos de catetos a y b, e hipotenusa c. Sacando estos triángulos, quedan dos cuadrados más pequeños (uno de lado a, el otro de lado b).

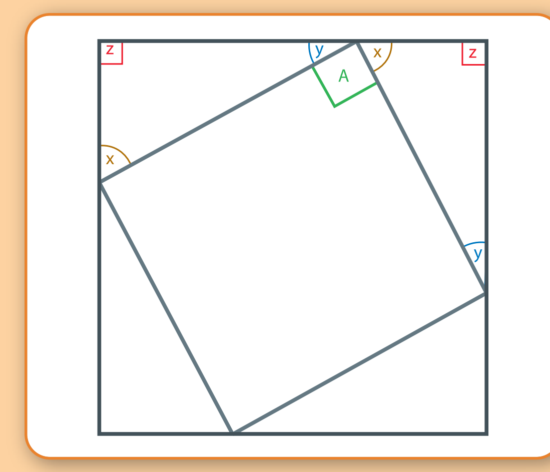
En el segundo gráfico, vemos los mismos cuatro triángulos, en el mismo cuadrado de lado $a + b$, pero acomodados de otra manera.

El área de ambos cuadrados es $(a + b)^2$, y en ellos vamos a restar las áreas de los cuatro triángulos de catetos a y b. En el primer cuadrado nos quedan dos cuadraditos, uno de área a^2 y el otro de área b^2. La suma de estas áreas debe coincidir con el área de la geometría de la figura central en el segundo gráfico, que parece ser un cuadrado de lado c. Si lo es, como su área sería c^2, habríamos demostrado el teorema de Pitágoras, pues nos queda

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Sin embargo, no es evidente que esa figura sea un cuadrado, y es un hecho que deberíamos demostrar. Tenemos dos formas de proceder que vamos a detallar porque las ideas involucradas en cada demostración son muy diferentes.

1er Método. La idea es utilizar la simetría de la figura, observamos que la figura permanece igual si la giramos 90°, 180°, ó 270°. Ya que no cambia y que su aspecto es el mismo, debe ser un cuadrilátero con sus cuatro ángulos iguales. Ahora, como la suma de los ángulos de un cuadrilátero es 360°, cada uno de ellos mide 90°.



Observemos también que los cuatro lados son iguales, ya que están formados por las hipotenusas de los triángulos, cuya longitud es c.

Luego, la figura es un cuadrado de lado c, y su área es c^2.

2do Método. Demostremos, utilizando los teoremas anteriores, que sus ángulos interiores miden 90°. Para esto, observemos con cuidado un ángulo interior A y los ángulos x, y, z del triángulo:

Observación
Este último método se basa en los resultados que demostramos antes, y no requiere movimientos de la figura -tal vez no permitidos- ni argumentos extraños. Ésta es la esencia del método axiomático, partimos de unos pocos supuestos que consideramos verdaderos, y demostramos nuevos resultados sin apelar a argumentos que no hayan sido enunciados o justificados antes.

Sabemos que

$$x + y + z = 180°$$

porque son los ángulos interiores de un triángulo, y además $z = 90°$ ya que es un ángulo rectángulo. Por otra parte,

$$x + y + A = 180°$$

porque forman un ángulo llano. Por lo tanto, tenemos que

$$A = 180° - x - y$$

pero también

$$z = 180° - x - y$$

con lo cual tenemos que $A = z$, y por lo tanto A es un ángulo recto.

El mismo razonamiento muestra que los otros ángulos de la figura central son rectos, y como sus lados son todos iguales, tenemos un cuadrado de lado c.

1.4.3. Números irracionales

Si bien el teorema de Pitágoras es una herramienta fundamental en la geometría, al introducir una nueva clase de números produjo un impacto aún mayor en relación a la aritmética. Se atribuye a los pitagóricos haber descubierto los números irracionales, aquellos que no son cocientes de números enteros (aunque también es posible que hayan llegado a este concepto por otro camino, a través de los pentágonos regulares).

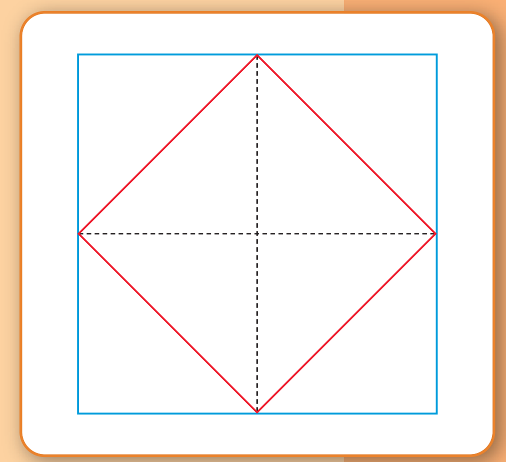
El problema, aparentemente simple, de hallar un cuadrado de área igual a 2 nos enfrenta al problema de calcular su lado, que debe ser . Geométricamente es sencillo de resolver, ya que es un caso particular del teorema de Pitágoras: dibujemos un triángulo rectángulo con sus catetos de longitudes iguales a 1 e hipotenusa c; ahora, por Pitágoras, tenemos:

$$1^2 + 1^2 = c^2,$$

es decir, $c^2 = 2$. Hemos resuelto fácilmente el problema, la hipotenusa de este triángulo rectángulo es el lado del nuevo cuadrado que buscamos, y resulta ser $c =$.

Podemos plantearlo de otra manera: la diagonal del cuadrado unitario mide . En la clásica obra de Platón, el *Menón,* se puede hallar una demostración geométrica sencilla, conocida ya en el siglo V a. C. En este libro, Sócrates dialoga con Menón, y al discutir sobre la enseñanza, sostiene que los conocimientos están en nuestro interior. Para demostrarlo, interroga a un esclavo de Menón, sin formación mate-

mática previa, sobre distintas cuestiones geométricas, y el esclavo realiza la siguiente construcción.



Consideremos un cuadrado cuyos lados midan 2, y dividámoslo en cuatro cuadrados unitarios. El cuadrado más grande tiene un área igual a 4, mientras que cada uno de los cuadrados pequeños tiene área igual a 1.

Tracemos ahora una diagonal en cada cuadrado pequeño, y observemos que nos queda un dibujo similar al que utilizamos en la demostración de Pitágoras:

Igual que antes, podemos demostrar que la figura central es un cuadrado, cuyo lado es la diagonal de un cuadrado unitario. Ahora, ¿cuánto mide esta diagonal, el lado de ese cuadrado? Una forma rápida de deducirlo, sin aplicar el teorema de Pitágoras (aunque para reconocer que esa figura es un cuadrado estamos repitiendo una parte de la demostración que hicimos), es ver que cada diagonal divide a los cuadrados pequeños en dos partes iguales, y por lo tanto, el área del cuadrado central es la mitad del área del cuadrado total, es decir, su área es igual a 2; con lo cual obtenemos entonces que esta diagonal mide $c =$. Sin embargo, hemos hecho una afirmación que tomamos como evidente: *cada diagonal divide a los cuadrados pequeños en dos triángulos de igual área*; ¿correspondería demostrar este hecho, o podemos aceptarlo sin muchas más preguntas?

Hasta el momento, hemos visto la aparición de de una forma bastante natural. Nada nos hace sospechar que este número no está dentro del conjunto de números conocidos en esa época (los naturales 1, 2, 3,... y los cocientes obtenidos dividiendo dos de ellos). Para esto, vamos a suponer que existen dos números naturales n y m tales que

y vamos a demostrar que eso nos lleva a un absurdo. Es decir, veremos que no pueden existir tales n y m, o de lo contrario caemos en una contradicción. Pero, suponiendo que existan, tenemos que estos números se descomponen de manera única como productos de primos, esto es,

$$n = p_2 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_k, \qquad m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_j.$$

Ahora, como suponemos que

elevando al cuadrado nos queda

Observación: Ésta es una demostración muy poco geométrica, y está basada en el teorema fundamental de la aritmética, que afirma que existe una única descomposición de un número natural como producto de primos.

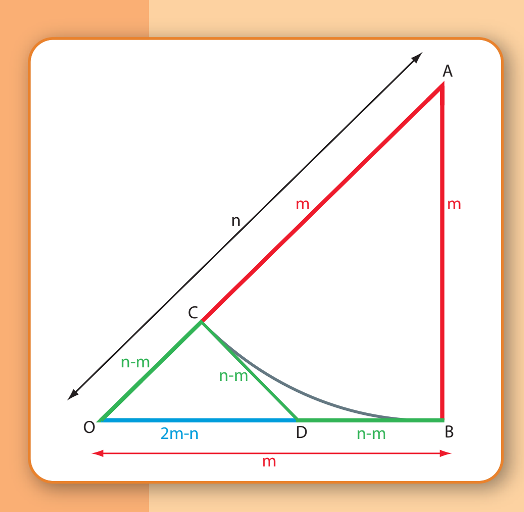
y despejando,

$$2m^2 = n^2.$$

Utilizamos ahora la descomposición anterior, y debe ser

pero observemos que el producto del lado izquierdo tiene $2j + 1$ factores, mientras que el del lado derecho tiene $2k$. Como $2j + 1$ es impar, no puede ser igual a $2k$ (que es un número par, por ser múltiplo de 2), y hemos obtenido una contradicción.

Es posible dar una demostración geométrica, la siguiente se debe al matemático Tom Apostol, quien la publicó en el *American Mathematical Monthly* en el año 2000.



Esta demostración está basada en la reducción al absurdo, como ya vimos antes. Supongamos que existen distintos valores de n y m tales que su cociente es , y que m es el menor número natural que podemos poner en el denominador de la fracción

Observemos que esto siempre es posible, pues si $= a / b$ para algún par de números naturales a y b, basta revisar si los posibles valores 1, 2, …, $b - 1$ sirven como denominadores.

Suponiendo entonces que m es el menor número natural que podemos poner en el denominador, construimos un triángulo rectángulo cuyos catetos midan m y su hipotenusa mida n. Esto es posible por el Teorema de Pitágoras, ya que

$$n^2 = m^2 + m^2 = 2m^2,$$

es decir,

El paso siguiente es construir un triángulo más chico, y que sus lados también midan un número natural. Si podemos hacer esto, llegamos a una contradicción, pues $\boldsymbol{m}$ era

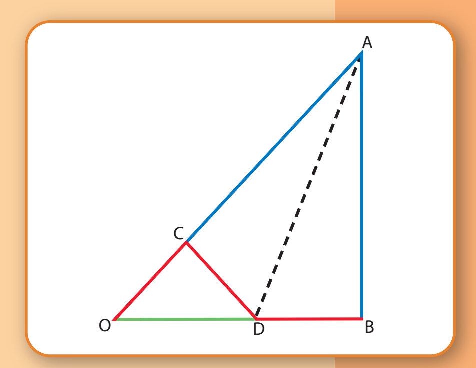
el menor número natural que podíamos utilizar como longitud de los catetos del triángulo rectángulo. Veamos, entonces, que podemos hallar otro triángulo más chico a partir de uno dado.

Ahora, marquemos el punto *C* sobre la hipotenusa, tal que *AC* mida también ***m***. Entonces, el segmento *OC* mide $n - m$, un número natural, y también mide lo mismo el segmento *CD* (lo construimos perpendicular al lado *OA*).

El arco de círculo *BC es* tangente en *C* al segmento *CD*, es decir, toca al segmento sólo en este punto, y también es tangente en *B* al segmento *DB*, por ese motivo, *CD* y *DB* miden lo mismo, es decir $n - m$ (en principio, este punto no es evidente, y habría que demostrarlo, pero omitiremos los detalles técnicos que garantizan la igualdad de los segmentos). Por lo tanto, el segmento *OD* mide $2m - n$, que resulta ser otro número natural.

Entonces, obtuvimos un nuevo triángulo rectángulo, cuyos catetos miden ahora $n - m$ y su hipotenusa mide $2m - n$. Aplicando Pitágoras, deducimos que

Podemos ver en la figura que $m > n - m$, con lo que conseguimos una nueva fracción para con denominador menor, esto contradice nuestra suposición.



Esta demostración no es sencilla, aunque no utiliza argumentos complicados. El punto más delicado en esta demostración es convencernos de que *CD* y *DB* miden lo mismo. Hay una observación genial de los matemáticos J.H. Conway y R.K. Guy: *pliegue* el triángulo a lo largo del segmento *DA*, ahora debería ser evidente, por simetría, que *CD* es perpendicular a *OA*, y que *CD* y *DB* tienen la misma longitud

¡Una demostración que puede hacerse con una servilleta de papel, y sin necesidad de escribir en ella!

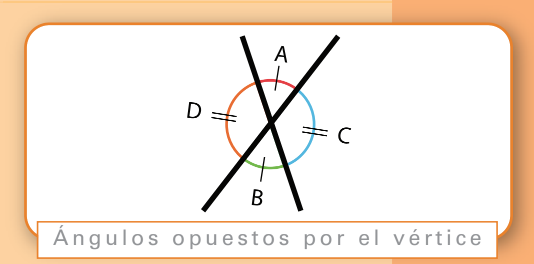
Capítulo 2

La geometría euclídea

Juan Pablo Pinasco

2.1. Introducción

En el capítulo anterior vimos algunos resultados clásicos, como la congruencia de ángulos opuestos por el vértice, el teorema de Pitágoras, o la suma de los ángulos interiores de un triángulo. En cada caso, para demostrarlos, utilizamos argumentos que consideramos verdaderos, pero sobre los que no habíamos dicho nada. Repasemos una de las demostraciones:



Ángulos opuestos por el vértice

Teorema

Los ángulos opuestos por el vértice son congruentes. En la figura anterior, los ángulos A y B son congruentes.

Demostración

Observemos que los ángulos A y C son adyacentes, forman un ángulo llano (esto es, suman en total 180°, dos rectos). Pero también son adyacentes B y C. Entonces, los ángulos A y B deben ser congruentes, ya que se los obtiene a ambos restando el ángulo C a un ángulo llano.

Puede parecernos que no hay ningún paso dudoso en este razonamiento, pero eso es porque aceptamos intuitivamente el siguiente supuesto:

> "*Si a una misma cosa le sumamos cosas distintas, obtenemos resultados distintos.*"

Es decir, si al ángulo C le sumamos el ángulo A por un lado, y el ángulo B por otro, si A y C fuesen distintos, el resultado debería ser diferente.

Otra forma de plantearlo es la siguiente:

> "*Si a dos cosas iguales les restamos una misma cosa, los resultados son iguales.*"

En el teorema, si al ángulo llano formado por A y C, le restamos el ángulo C, debe darnos lo mismo que si al ángulo llano formado por B y C le restamos C.

Esto no es lo único que hemos asumido en las demostraciones anteriores. Por ejemplo, en el capítulo anterior:

- Cuando demostramos que los ángulos internos entre paralelas son congruentes, fuimos más directos: invocamos explícitamente el Quinto Postulado como un ingrediente inevitable de nuestra demostración, que debíamos asumir como verdadero.

- Cuando demostramos que en todo triángulo la suma de los ángulos interiores es igual a dos rectos, trazamos por un vértice del triángulo una paralela al lado opuesto.

- Cuando demostramos que en todo cuadrilátero convexo la suma de los ángulos interiores es igual a 360°, comenzamos trazando una recta entre dos vértices.

Llegados a este punto, y una vez que tomamos conciencia de esto, cuando uno se enfrenta a estas demostraciones suele sentir cierta inseguridad: ¿Qué argumentos se pueden utilizar? ¿Qué cosas están permitidas? ¿Cuáles se pueden tomar como ciertas sin necesidad de demostrarlas? Esta es una sensación normal, y debemos tomarla muy en cuenta, cuando trabajemos con demostraciones matemáticas.

Una frase tan sencilla como "*trazamos una recta entre A y C*" parece no necesitar ninguna demostración, seguramente esté *permitido* hacerlo, *podemos* trazarla... pero, ¿Quién y dónde lo permitió? ¿Cómo sabemos que puede hacerse?

Más complicada es la afirmación: "*podemos trazar una recta por el punto A paralela a otra recta dada*", y lo comprobamos rápidamente si nos piden que indiquemos cómo trazar tal recta.

La geometría euclídea está repleta de afirmaciones similares, cuya validez parece obvia pero debería cuestionarse. Uno debería intentar demostrar todas estas afirmaciones, por más evidentes que nos resulten.

Sin embargo, es imposible demostrar absolutamente todo. Habrá un conjunto de afirmaciones iniciales que debemos aceptar sin demostración, y que serán la base de las siguientes demostraciones. Por ejemplo, "*podemos trazar una recta entre A y C*" será una afirmación de esta clase. Vamos a asumir que es cierta, y que dados dos puntos siempre podemos trazar la recta que los une. También vamos a aceptar como cierto que "*si a dos cosas iguales les restamos una misma cosa, los resultados son iguales.*"

Este tipo de afirmaciones que se acepta sin mayor discusión es un *axioma*, y se construye el resto de la teoría (ya sea la geometría, u otra teoría matemática) apoyándose en ellos. Los axiomas son la solución a las preguntas planteadas antes:

¿Qué argumentos se pueden utilizar? ¿Qué cosas están permitidas? ¿Cuáles se pueden tomar como ciertas sin necesidad de demostrarlas? Todo teorema o proposición que deseemos demostrar debe poder reducirse finalmente a los axiomas iniciales, que deben estar claros de entrada. El conjunto de estos axiomas forma un *sistema axiomático*, y constituye la materia prima y la herramienta con las cuales se construirá el resto de la geometría euclídea.

Por supuesto, para acortar las demostraciones podemos apelar a otros resultados que se hayan obtenido a partir de los axiomas. Cada vez que demostramos un teorema o una proposición, podemos agregarlo a nuestro arsenal de afirmaciones con las cuales demostrar otras.

En general, los resultados que demostraremos se llaman *lemas*, *proposiciones*, *teoremas*, y *corolarios*. Todos ellos son afirmaciones que hemos demostrado que son verdaderas a partir de los axiomas (o de otros resultados ya demostrados). Hay cierta arbitrariedad al otorgarle a un resultado uno de estos nombres, si bien las siguientes pautas pueden ayudarnos a la hora de distinguir porqué a un resultado lo llamamos *Teorema* y a otro *Proposición*.

- Un *Lema* suele ser un resultado auxiliar, un paso en la demostración de un Teorema pero que conviene aislar porque se repite en las demostraciones de distintos teoremas.

- Una *Proposición* es un resultado intermedio, con cierta importancia por sí mismo. Puede ser una consecuencia directa de una definición, que conviene escribir para referirnos a ella cuando la necesitemos aunque no sea muy relevante.

- Un *Teorema* es en general un resultado importante, una afirmación verdadera pero no tan inmediata como una Proposición.

- Un *Corolario*, en cambio, es un resultado que se demuestra de inmediato a partir de un Teorema. Suele ser un caso particular de una situación mucho más amplia, que si bien está contenido en el resultado del Teorema, conviene aislar.

Una observación importante: no todo conjunto de afirmaciones sirve como un sistema axiomático. El principio más importante que deben cumplir nuestros posibles axiomas es que no lleven a contradicción, es decir, que al utilizarlos no se deduzcan resultados contradictorios. Hay un cierto grado de arbitrariedad al armar un sistema axiomático. Uno puede elegir distintos axiomas, o enunciarlos de distintas maneras, pero si generan contradicciones, no sirven como axiomas. Un segundo requisito, no muy grave en caso de no cumplirse, es que no debería agregarse como axioma un resultado que se deduce de los axiomas que ya se tienen.

2.2. Los axiomas de la geometría euclídea

El mérito principal de los Elementos de Euclides es haber llevado a cabo este procedimiento, eligiendo unos pocos axiomas, como base para desarrollar la geometría. El sistema axiomático de la geometría euclídea se divide en dos grupos de afirmaciones: unas son de carácter más general, y las otras se refieren específicamente a los objetos geométricos. Suele llamarse *nociones comunes* a los del primer grupo, y *postulados* a los del segundo.

Comencemos por las nociones comunes:

1. **Cosas iguales a una misma, son iguales entre sí.**
2. **Si a iguales se agregan iguales, los todos son iguales.**
3. **Si de cosas iguales se restan cosas iguales, las restas son iguales.**
4. **Cosas coincidentes son iguales entre sí.**
5. **El todo es mayor que la parte.**

Esta lista de afirmaciones nos permite comparar "cosas": pueden ser números, figuras, etc. El término *iguales* hay que tomarlo en un sentido muy general, porque tendrá distintos significados según el contexto. Euclides utiliza indistintamente *iguales*, *congruentes*, o *equivalentes*, si bien hoy día, se utiliza cada uno de estos términos en determinados contextos. Por ejemplo, hablamos por un lado de igualdad de números, y por otro de congruencia de ángulos o de segmentos. No debemos olvidar que esta es una convención arbitraria que no constituye una cuestión clave o fundamental de la matemática.

Los postulados son los siguientes:

1. Por dos puntos puede trazarse una recta.
2. Una recta dada puede extenderse indefinidamente.
3. Dado un centro y un radio puede trazarse un círculo.
4. Todos los ángulos rectos son congruentes a uno dado.
5. Si dos líneas cruzan una tercera de tal manera que la suma de los ángulos interiores en un lado es menor de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas deben cruzarse una a la otra de ese lado, prolongadas lo suficiente.

Observemos que estos postulados se refieren a entes geométricos: puntos, rectas, círculos, ángulos. Las definiciones de estos términos se dan antes de la lista de postulados, pero son definiciones bastante imprecisas. Por ejemplo:

Punto: "punto es aquello que no tiene partes". | **Definición**

Línea recta: "una línea recta es aquélla que yace por igual respecto de los puntos que están en ella". | **Definición**

Difícilmente estas definiciones nos digan qué es un punto o una recta si no lo sabemos de antes. Los conceptos de *punto* o de *recta* son conceptos primitivos y, en cierto sentido, imposibles de definir. En cualquier definición que intentemos, tendremos que utilizar conceptos que no hemos definido previamente, de lo contrario, entraríamos en una espiral de definiciones de nunca acabar. La postura moderna es dejar estos conceptos sin definir.

Por otra parte, la definición de ángulo es muy interesante:

Ángulo plano "un ángulo es la inclinación de dos líneas que se encuentran una a otra en un plano y no están en línea recta". | **Definición**

Observando con cuidado esta definición, vemos que lo define para líneas que no son necesariamente líneas rectas. Sin embargo, Euclides utilizará esta noción de ángulos entre curvas y rectas una única vez en los Elementos. De hecho, en la definición siguiente se aclara: "cuando las líneas que contienen el ángulo son rectas, se lo llama rectilíneo".

Hay muchas definiciones que introducen nociones importantes, y propiedades de distintas figuras. No vamos a listarlas a todas, pero algunas de las definiciones más importantes son las siguientes:

Ángulo recto y rectas perpendiculares: "cuando una línea recta forma ángulos iguales a cada lado al intersecarse con otra, los ángulos son rectos; llamamos perpendiculares a estas líneas rectas". | **Definición**

A partir del ángulo recto se define como ángulo agudo (respectivamente, obtuso) al que es menor (respectivamente, mayor) que un recto.

Se definen también distintos polígonos, y en el caso de triángulos, se los clasifica en *acutángulos* (tienen los tres ángulos menores a un recto), *rectángulos* (tienen un ángulo recto) y *obtusángulos* (tienen un ángulo obtuso). Se los clasifica también según las longitudes de sus lados: *equilátero* es aquel que tiene todos sus lados iguales; *isósceles* es el que tiene dos lados iguales; y *escaleno* aquel que tiene todos sus lados distintos.

En el caso *del círculo*, es la figura cuyos puntos están todos a la misma distancia de un punto fijo, su *centro*. Un *diámetro* es el segmento de recta que une dos puntos del círculo pasando por el centro, y Euclides afirma que un diámetro divide a un círculo en dos partes iguales. Recordemos que éste era uno de los resultados de Thales, pero Euclides va a aceptarlo sin demostración.

Finalmente, una definición interesante es la de rectas paralelas:

Definición

Rectas paralelas: son aquéllas que (estando en un mismo plano) no se intersecan si son prolongadas indefinidamente en uno u otro sentido

Observemos que esta definición es muy especial: ¿cómo verificarla sin prolongar indefinidamente las rectas? Junto con el quinto postulado son la parte más complicada del sistema axiomático de la geometría euclídea. Miles de matemáticos y de aficionados han buscado formulaciones más sencillas para la noción de paralelismo y para reemplazar el quinto postulado, y se tienen formas equivalentes, a veces más sencillas. También se pretendió demostrarlo a partir de la definición de paralelas y los cuatro primeros postulados, pero ésta resultó ser una tarea imposible, ya que no se deducía de estos.

2.2.1. Independencia y consistencia

Terminamos la sección anterior destacando dos propiedades importantes que debían cumplir los sistemas axiomáticos:

- *Independencia:* no debían agregarse axiomas redundantes, que se dedujeran de los anteriores.
- *Consistencia:* los axiomas no debían generar contradicciones.

Lamentablemente, no estamos en condiciones de justificar que el sistema axiomático de la geometría euclídea cumple estas propiedades. Las demostraciones de independencia y consistencia están más allá de nuestro alcance. Pero tampoco debemos preocuparnos mucho, porque distintos matemáticos ya se encargaron de estudiar este problema. En especial, destaquemos el papel de David Hilbert quien a fines del siglo XIX hizo un profundo estudio de los fundamentos de la geometría.

Tampoco vamos a desarrollar aquí en detalle el sistema axiomático de la geometría euclídea. Los axiomas anteriores no son suficientes para desarrollarla completamente, pero es mucho lo que podemos hacer con ellos. Por ejemplo, un postulado que falta es el que nos garantiza que hay intersección entre dos círculos (si sus centros están a menor distancia que la suma de sus radios), o que una recta

se interseca con un círculo si la distancia de la recta al centro del círculo es menor que el radio del mismo. Asumamos estas dos condiciones extras, y comencemos con la geometría propiamente dicha.

2.3. Construcciones geométricas

2.3.1. La regla y el compás

Los instrumentos por excelencia de la geometría euclidiana clásica son la regla y el compás. Sin embargo, ¡no son mencionados en los Elementos de Euclides!

Ambos son instrumentos de tipo ideal, derivados de la geometría hecha con cuerdas de los egipcios:

- la recta nos permite unir dos puntos (operación permitida por el primer postulado), tal como los conectamos al tender una cuerda de un punto al otro;
- el compás nos permite trazar un círculo centrado en un punto dado y con un radio dado, tal como se lo obtiene fijando un extremo de una cuerda en el punto que corresponde al centro, y haciendo girar la cuerda extendida.

Con estos instrumentos se pueden realizar distintas construcciones, y estas a su vez reemplazan la noción de movimiento en el plano euclídeo: uno no "cambia de lugar" una figura, sino que la construye en otra parte. A continuación veamos algunas construcciones típicas.

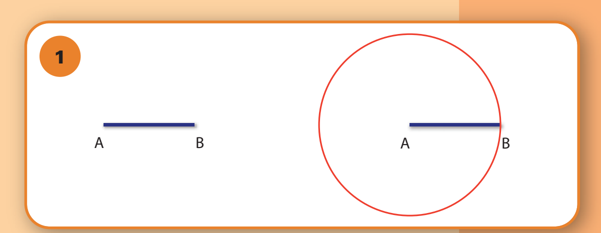
2.3.2. Construcciones básicas

Vamos a repasar las primeras construcciones de los Elementos de Euclides, que tienen un gran valor formativo en el uso de la regla y el compás.

Construir un triángulo equilátero con un segmento *AB* dado como lado.

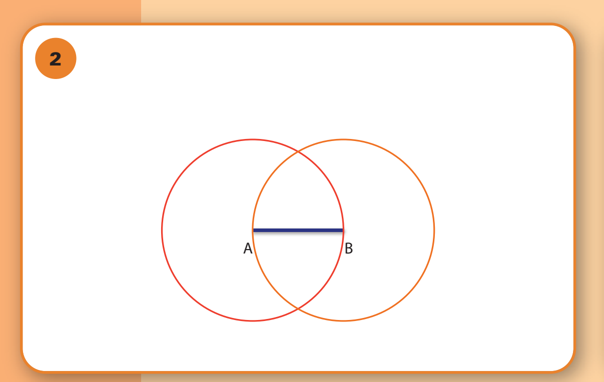
Esta es una construcción sencilla, que se realiza en apenas tres pasos:

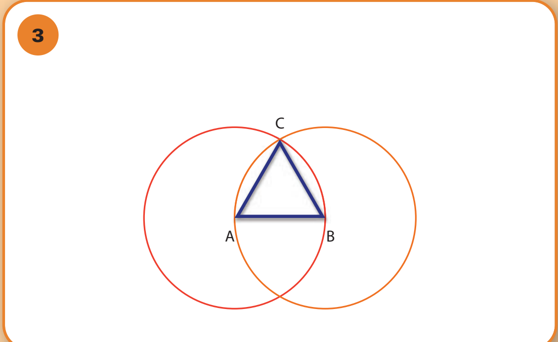
1. Dado el segmento *AB*, comenzamos colocando el compás en el punto *A*, y trazamos un círculo utilizando como radio este segmento.



2. Ahora, trazamos otro círculo con centro en *B* y el segmento *AB* como radio.

3. Unimos uno de los puntos donde se intersecan ambos círculos (llamémoslo *C*) con *A* y *B*:



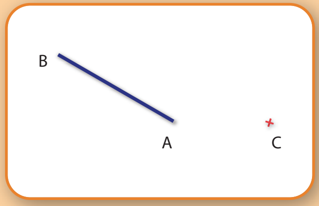


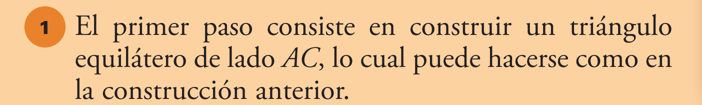
El triángulo *ABC* es equilátero, pues los lados *AB* y *AC* son iguales al ser radios de un mismo círculo; pero también *AB* es igual a *CB*, ya que son radios del otro círculo. Entonces, por la primera noción común ("cosas iguales a una misma son iguales entre sí"), los lados *AC* y *CB* son iguales.

Antes de pasar a otra construcción, observemos que los dos primeros pasos se basan en el tercer postulado ("dado un centro y un radio puede trazarse un círculo"), mientras que el tercer paso se basa en el primer postulado ("por dos puntos puede trazarse una recta"). No vamos a hacer este análisis en cada construcción, pues alargaría inútilmente las demostraciones.

Dibujar desde un punto determinado, un segmento congruente a otro segmento dado.

Queremos dibujar en el punto *C* un segmento congruente al segmento *AB*.



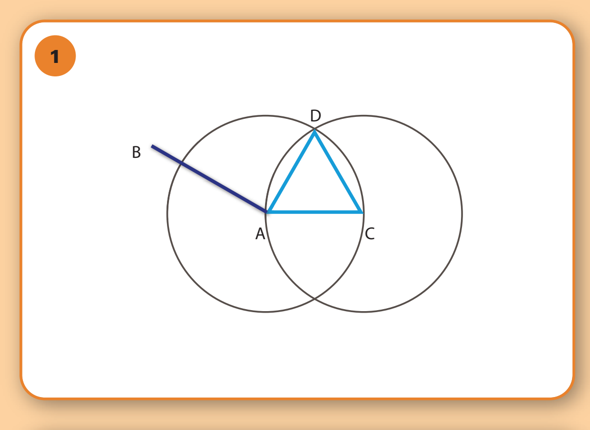


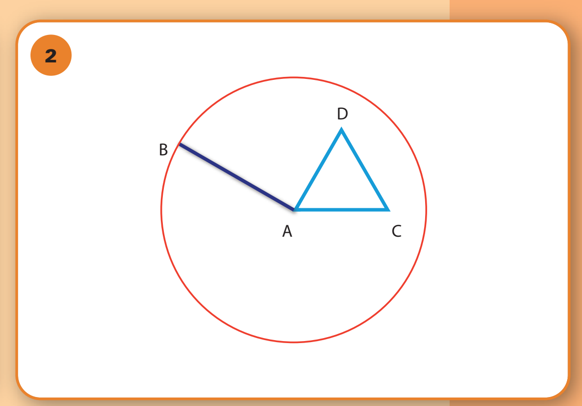
1. El primer paso consiste en construir un triángulo equilátero de lado *AC*, lo cual puede hacerse como en la construcción anterior.

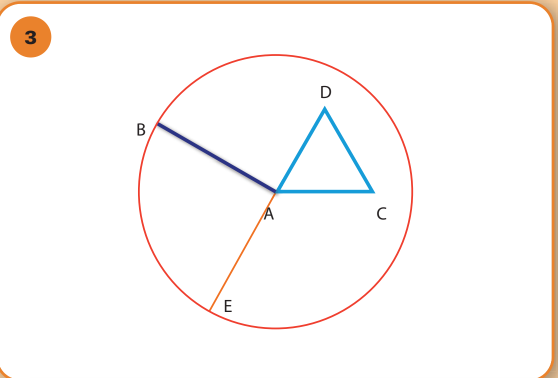
2. A continuación, se traza un círculo con centro en *A* y radio *AB*.

3. Luego se prolonga el segmento *DA* hasta que interseca al círculo en el punto *E*.

4. Finalmente, con centro *D* y radio *DE* se traza un nuevo círculo, y prolongando *DC* hasta que se interseca con el círculo en el punto *F*, se obtiene el segmento *CF* que es congruente al segmento *AB* que nos dieron originalmente.







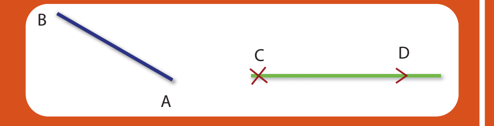
Observación: esta construcción es importante porque reemplaza el movimiento de figuras geométricas. Por otra parte, ilustra el uso del compás: podríamos pensar que, para hacer esta construcción, es suficiente con abrir el compás apoyando un extremo en A, el otro en B, y luego -manteniendo la abertura- levantarlo de la hoja y llevarlo hasta el punto C. Sin embargo, no hay nada en los axiomas que nos permita hacer esto.

Ejercicio 1

Verificar que el segmento CF es congruente al segmento AB.

Ejercicio 2

Dado un segmento AB, y una semirrecta CD, construir un segmento sobre la misma congruente al segmento AB desde el punto C.



Terminemos esta sección con otras dos construcciones, la bisectriz de un ángulo, y la bisectriz de un segmento.

Bisecar un ángulo.

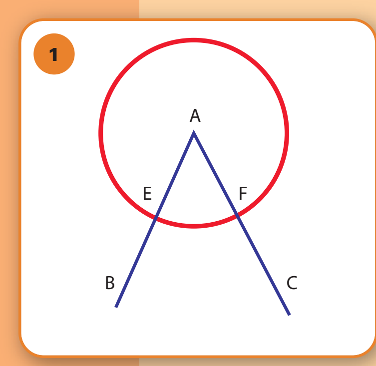
Dado el ángulo *BAC*, hallar una recta *AD* tal que los ángulos *BAD* y *DAC* sean iguales. Esta recta se llama bisectriz del ángulo.

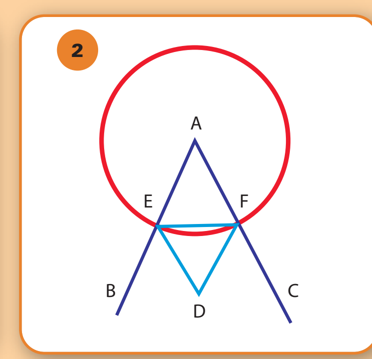
1. Dado el ángulo *BAC*, trazamos un círculo centrado en *A* (de cualquier radio).

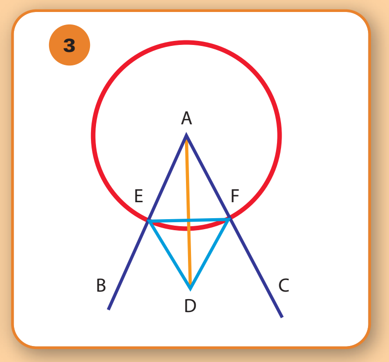
   Llamamos *E* a la intersección del círculo con el segmento *AB*, y *F* a la intersección con *AC*.

2. Construimos un triángulo equilátero *DEF* de lado *EF*, lo cual puede hacerse por la primer construcción.

3. Unimos los puntos *A* y *D*, y la recta *AD* biseca el ángulo.







Bisección de un segmento.

Dado un segmento *AB*, hallar su punto medio.

1. Dado el segmento *AB*, construimos el triángulo equilátero *ABC*.

2. Ahora, por la construcción anterior, podemos bisecar el ángulo *C* con una recta *CE*.

3. El punto *E* es el punto medio de *AB*.

Observación: **en comparación con las dos primeras construcciones, en estas dos puede quedarnos la sensación de que falta algo. Así es: no hemos verificado que los ángulos BAD y DAC sean congruentes (al bisecar el ángulo), ni que los segmentos AE y EB sean congruentes en esta última. El motivo es que para hacerlo necesitamos los criterios de semejanza de triángulos, que serán el objetivo de nuestra próxima sección.**

2.4. Congruencia y semejanza de triángulos

Diremos que dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* son *congruentes* cuando sus lados son congruentes (*AB* con *A'B'*, *BC* con *B'C'*, y *AC* con *A'C'*), y también son congruentes sus ángulos (*A* con *A'*, *B* con *B'*, y *C* con *C'*) En otras palabras, si pudiéramos levantar uno de los triángulos y colocarlo sobre el otro, coincidirían.

La semejanza de triángulos es un concepto ligeramente distinto: diremos que dos triángulos *ABC* y *A'B'C'* son *semejantes* cuando sus ángulos son congruentes (*A* con *A'*, *B* con *B'*, y *C* con *C'*), y sus lados son *proporcionales*, es decir, si dividimos las longitudes de los lados correspondientes, obtenemos un mismo valor

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

(en general, indicaremos la longitud de un segmento *AB* como $\overline{AB}$).

Dados dos triángulos semejantes, no podemos moverlos para que coincida uno con el otro, pero podemos pensar que uno es un modelo a diferente escala del otro, como la maqueta de un edificio respecto del edificio verdadero.

La semejanza de triángulos es uno de los conceptos clave en la resolución de nuestro problema. No podemos medir directamente los lados del triángulo que forman la Tierra, la Luna y el Sol, pero si encontráramos un triángulo semejante estaríamos en condiciones de medirlo y deducir cuáles son las distancias que buscamos.

Para tener en cuenta al resolver el problema

2.4.1. Criterios de congruencia de triángulos

El primer criterio de congruencia de triángulos es el siguiente:

Si los triángulos ABC y A'B'C' tienen dos lados congruentes (AB con A'B', AC con A'C'), y el ángulo comprendido por un par de lados es congruente al ángulo comprendido por el otro par (A y A'), entonces los triángulos son congruentes.

Criterio LAL
(lado-ángulo-lado)

Brevemente, dados dos triángulos, para ver si son iguales nos basta con comparar las longitudes de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos. Si estos valores coinciden con los del otro triángulo, entonces el tercer lado debe medir lo mismo en cada triángulo.

El siguiente criterio nos dice que alcanza con conocer dos ángulos y el lado entre ellos:

Criterio ALA
(ángulo-lado-ángulo)

Si los triángulos ABC y A′B′C′ tienen un par de ángulos congruentes (A y A′, B y B′) y los lados comprendidos entre cada par de ángulos son congruentes (AB con A′B′), los triángulos son congruentes.

Finalmente, el tercero nos dice que basta conocer las longitudes de los tres lados:

Criterio LLL
(lado-lado-lado)

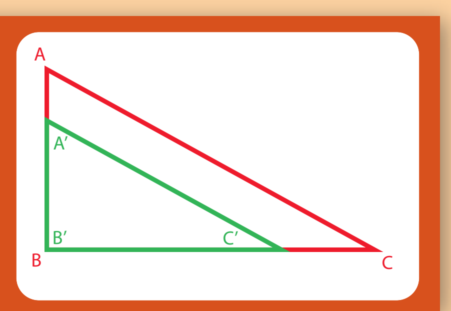
Si los triángulos ABC y A′B′C′ tienen sus tres lados congruentes (AB con A′B′, AC con A′C′, BC con B′C′), entonces los triángulos son congruentes.

Es interesante pensar este criterio de forma mecánica: tenemos tres varillas unidas que forman un triángulo. El teorema nos dice que no podemos deformar el triángulo sin acortarlas o alargarlas, tenemos una sola forma de ubicarlas.

Observemos el parecido entre los dos primeros criterios: dos lados y el ángulo que forman; dos ángulos y el lado entre ellos. ¿Valdrá un criterio basado en la congruencia de los tres ángulos?

Ejercicio 3

Determinar si son congruentes dos triángulos ABC y A′B′C′ cuyos ángulos son congruentes (A con A′, B con B′, y C con C′).



Ejercicio 4

Si cambiamos el criterio LAL, y pedimos dos lados congruentes y un ángulo que no sea el comprendido entre ellos, ¿se puede garantizar la congruencia?

Ejercicio 5

Si cambiamos el criterio ALA, y pedimos dos ángulos congruentes y un lado que no sea el comprendido entre ellos, ¿se puede garantizar la congruencia?

2.4.1.2. Aplicaciones de los criterios de congruencia

Como aplicación de los criterios de congruencia de triángulos vamos a demostrar un teorema clásico, conocido como el *Pons Asinorum*, o puente de los burros. Luego, verificaremos que la bisección del ángulo y del segmento que hicimos en la sección anterior, son correctas.

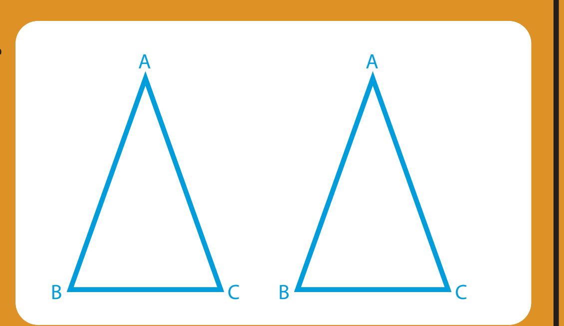
Recordemos brevemente que un *triángulo isósceles* es aquel que tiene dos lados congruentes; llamaremos *base* al tercer lado.

(Pons Asinorum) *En un triángulo isósceles, los ángulos de la base son congruentes.* **Teorema**

Demostración

Sea *ABC* el triángulo isósceles, y sus lados congruentes son *AB* y *AC*. Para la demostración, consideremos la siguiente figura, donde hemos repetido el triángulo.

El lado *AB* del triángulo del lado izquierdo es congruente al lado *AC* del triángulo de la derecha (pues en realidad son el mismo triángulo, y esos dos lados eran congruentes). También, el lado *AC* del triángulo de la izquierda es congruente al lado *AB* del triángulo de la derecha. Por último, el ángulo *A* es congruente al ángulo *A* (pues es el mismo ángulo).

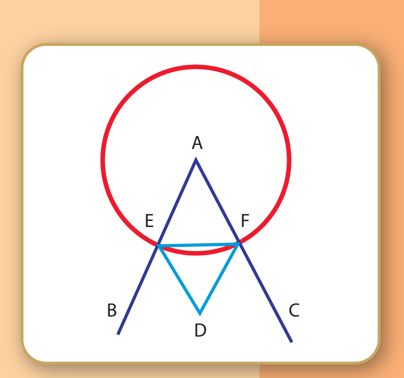


Podemos ahora aplicar el criterio de congruencia de triángulos LAL: tenemos un par de lados y el ángulo que forman congruentes a los de la otra figura, con lo cual ambos triángulos son congruentes. Entonces, el ángulo *B* del triángulo de la izquierda es congruente al ángulo *C* del triángulo del lado derecho.

Hemos demostrado que los ángulos de la base (*B* y *C*) son congruentes.

Bisecar un ángulo.

La recta AD biseca el ángulo A; recordemos la construcción que habíamos hecho:



Habíamos trazado un círculo con centro en *A*, y su radio era *AE*; y sobre el segmento *EF* construimos un triángulo equilátero *DEF*.

Ahora, los triángulos *AED* y *AFD* son congruentes, por el criterio LLL, ya que:

- *AE* congruente a *AF*, por ser radios de un mismo círculo.
- *AD* es congruente a sí mismo.
- *ED* es congruente a *FD*, por ser lados del triángulo equilátero *DEF*.

Por lo tanto, ambos triángulos son congruentes, y los ángulos respectivos deben ser congruentes, con lo cual *AD* biseca el ángulo *A*.

Bisecar un segmento.

La recta CE biseca el segmento AB. Recordemos la construcción que habíamos hecho, e indiquemos un par de ángulos en la figura:

Construimos el triángulo equilátero *ABC*, y bisecamos el ángulo *C*.

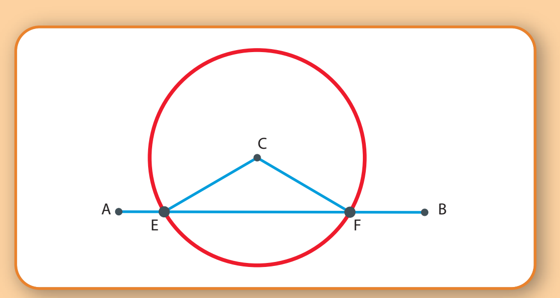
Ahora, los triángulos *ACE* y *CEB* son congruentes por el criterio LAL:

- *AC* congruente a *BC*, por ser lados del triángulo equilátero *ABC*,
- *CE* es congruente a sí mismo.
- Los ángulos *a* y *a'* son congruentes (pues *CE* bisecaba el ángulo).

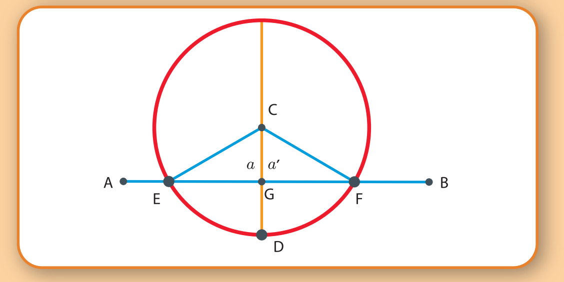
Veamos otras dos aplicaciones del teorema anterior, que utilizan también los resultados de bisección de un segmento.

Trazar una perpendicular a una recta dada desde un punto que no pertenece a la recta.

1. Dada una recta *AB* y el punto *C*, trazamos un círculo de centro *C* que corte a la recta en dos puntos (para esto basta tomar un punto separado de *C* por la recta, y utilizar esa distancia como radio). Sean *E* y *F* los puntos donde se cortan la circunferencia y la recta.



2. Ahora, podemos bisecar el segmento *EF*, con la construcción que vimos antes, y obtenemos el punto *G*. Finalmente, por los puntos *C* y *G* trazamos una recta, y veremos que es perpendicular a la recta *AB*. Señalemos también en la figura los ángulos *a* y *a'* que hace *CG* con *AB*.



3. Para demostrar que la recta *CG* es perpendicular a *AB* necesitamos ver que los ángulos a y a' son congruentes. Pero si observamos los triángulos *ECG* y *CGF* vemos que son congruentes por el criterio LLL:

   - El lado *EC* es congruente a *CF* por ser radios de un mismo círculo.
   - El lado *CG* es común a ambos triángulos.
   - El lado *EG* es congruente al lado *GF* pues *G* divide a *EF* en dos partes iguales.

   Por lo tanto, ambos triángulos son congruentes, y los ángulos respectivos lo son. Entonces, el ángulo a es congruente al ángulo a'. Como ambos ángulos forman un ángulo llano,

$$a + a' = 180°,$$

   y resulta entonces $a = a' = 90°$.

Sea AB un diámetro de un círculo dado, y C un punto arbitrario en la circunferencia. Entonces, ABC es un triángulo rectángulo y AB es su hipotenusa. **Teorema**

1. Dado el diámetro *AB*, podemos bisecarlo y su punto medio *D* es el centro del círculo. Unimos el punto *C* con *D*, y hemos obtenido dos triángulos.

2. Los triángulos *ACD* y *BCD* son isósceles, ya que *AD*, *CD* y *DB* son radios del círculo. Entonces, los ángulos de la base de cada triángulo son congruentes, entre sí, y tenemos:

$$a = a', \; b = b'$$

3. Como la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180°, tenemos:

$$a + a' + b + b' = 180°$$

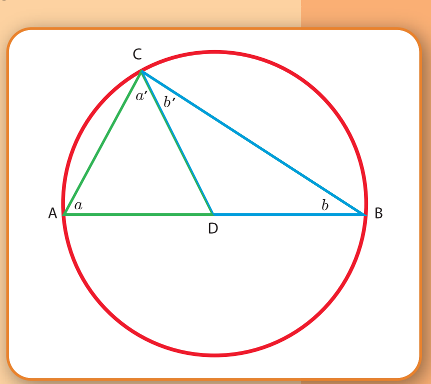
   y usando la relación entre a y a', b y b', queda

$$a' + a' + b' + b' = 180°$$

$$2a' + 2b' = 180°$$

$$a' + b' = 90°$$

   con lo cual, *ABC* es un triángulo rectángulo.



2.4.2. Criterios de semejanza de triángulos.

Para tener en cuenta al resolver el problema

Veamos el concepto de semejanza. Este concepto resulta más útil que el de congruencia, en especial en nuestro problema, donde no es posible construir un triángulo congruente al que forman la Tierra, el Sol y la Luna, mientras que es mucho más sencillo construir un triángulo semejante a escala más pequeña.

Hemos dicho que dos triángulos son semejantes si tienen sus tres ángulos congruentes y sus lados son proporcionales. Si recordamos del primer capítulo el resultado de Pitágoras de la suma de los ángulos interiores de un triángulo, vemos que no es necesario pedir que los tres ángulos sean congruentes, y basta sólo con dos: por fuerza, el tercero debe ser congruente, ya que debe completar los 180°. Ese será nuestro primer criterio de semejanza:

Criterio AA
(ángulo-ángulo)

Si los triángulos ABC y A’B’C’ tienen dos ángulos congruentes (A con A’, B con B), entonces los triángulos son semejantes.

Los dos criterios siguientes involucran las longitudes de los lados y son similares a los de congruencia de triángulos; en ambos se reemplaza la condición de congruencia de los lados por la de proporcionalidad:

Criterio LLL
(lado-lado-lado)

Si los lados de los triángulos *ABC* y *A’B’C’* son proporcionales, es decir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

entonces los triángulos son semejantes.

Criterio LAL
(lado-ángulo-lado)

Si dos lados de los triángulos *ABC* y *A’B’C’* son proporcionales, es decir

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}}$$

y los ángulos A y A’ comprendidos entre ellos son congruentes, entonces los triángulos son semejantes.

La aplicación más importante de los criterios de semejanza es la trigonometría, de la que hablaremos en el próximo capítulo. Ahora, veremos algunos ejemplos de aplicaciones prácticas de los criterios.

Ejemplo: Sean los triángulos *ABC* y *A’B’C’*. Sabiendo que:

$\overline{AB}$ = 4 cm, $\overline{A'B'}$ = 6 cm,

$\overline{AC}$ = 6 cm, $\overline{A'C'}$ = 9 cm,

$\overline{CB}$ = 8 cm, $\overline{C'B'}$ = 12 cm,

¿Son semejantes?

Solución: en este caso no sabemos nada de los ángulos, con lo cual no podemos aplicar los criterios AA o LAL. Nos queda la opción de ver si los lados son proporcionales.

Dividiendo, tenemos

$$\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3},$$

y por lo tanto, son semejantes.

Ejemplo: En la figura 4.2.1, sabemos que $\overline{AB} = \overline{AB'}$, y $\overline{AC} = \overline{AC'}$. ¿Son semejantes? ¿Son congruentes?

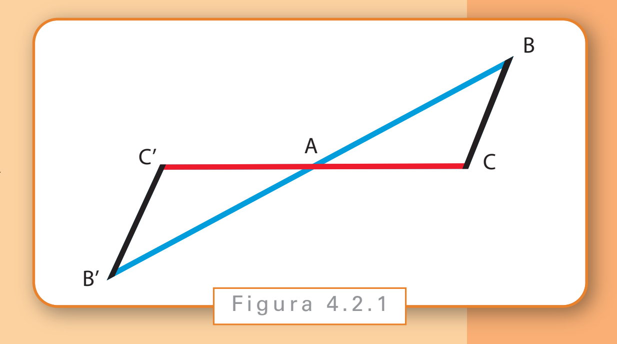


Figura 4.2.1

Solución: Sabemos que un par de lados de cada triángulo son congruentes (y por lo tanto, también son proporcionales). Si supiéramos que los ángulos comprendidos por cada par son congruentes, los triángulos serían semejantes y también congruentes. Pero como son opuestos por el vértice, los ángulos son congruentes.

Problema: Un barco se encuentra en el mar, vigilando una ciudad. Si los habitantes de la ciudad conocieran la distancia al barco, podrían atacarlo con sus catapultas. ¿Es posible calcularla? (Plinio y Plutarco le atribuyen esta idea a Thales, dicen que fue el primero en calcular la distancia de una flota enemiga a la costa, y sabiendo la distancia, le arrojaron proyectiles incendiarios y la hundieron.)

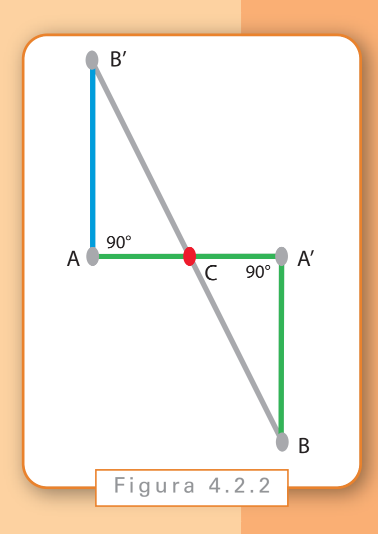


Figura 4.2.2

Solución: La figura 4.2.2 nos ayudará a resolverlo.

Supongamos que estamos parados en el punto *A*, y el barco está en el punto *B'*. El problema es conocer la distancia $\overline{AB'}$.

Ahora caminamos por la costa desde *A* hasta *A'*, en forma perpendicular a *AB'*, y clavamos un bastón en el punto *C*. Cuando llegamos a *A'*, caminamos alejándonos de la costa, hasta un punto *B* a determinar.

¿Cómo elegimos este punto? Queremos que queden alineados el barco y el bastón clavado en *C*, y determinamos *B* de esa manera.

Veamos que los triángulos *AB'C* y *CA'B* son semejantes. Lamentablemente, sólo conocemos un lado del triángulo *AB'C*, el lado *AC* que está sobre la costa y podemos medir su longitud, no conocemos los otros lados porque deberíamos internarnos en el mar para medirlos. Pero todavía podemos utilizar el criterio AA: observemos que los ángulos *A* y *A'* son rectos, y por lo tanto son congruentes; por otro lado, los ángulos sobre el vértice *C* son opuestos por el vértice, así que también son congruentes.

Sabiendo que los triángulos *AB'C* y *CA'B* son semejantes, podemos determinar la longitud del lado *AB'*: podemos medir $\overline{AC}$, $\overline{CA'}$, y $\overline{A'B}$. De la relación

$$\frac{\overline{AB'}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{CA'}}$$

Podemos despejar la distancia desconocida en función de los otros tres valores:

$$\overline{AB'} = \frac{\overline{A'B}}{\overline{CA'}} \cdot \overline{AC}$$

Observación: **las tres longitudes del lado derecho de la fórmula anterior se pueden calcular sin necesidad de acercarse al barco, ya que se hacen en tierra firme. El método funciona en muchas otras situaciones similares, donde sólo podemos medir una longitud del triángulo que nos interesa, pero podemos construir un triángulo semejante al cual sí podemos medirle todos sus lados.**

Terminamos este capítulo con un resultado importante que utilizaremos más adelante.

Proposición

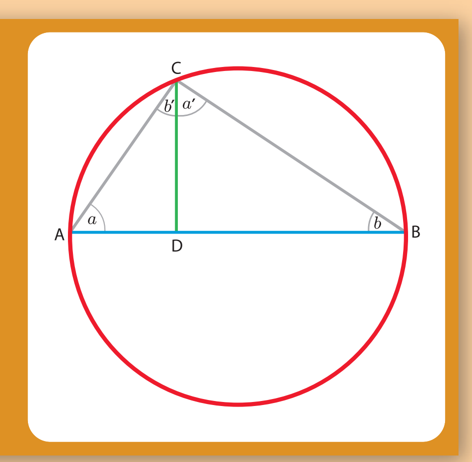
Sea *AB* el diámetro de un círculo, *C* un punto en la circunferencia. Sea *CD* la perpendicular al diámetro *AB* que pasa por *C*. Entonces, los triángulos *ABC*, *ACD* y *BCD* son semejantes.

Demostración

Indiquemos en la figura los ángulos que no son rectos.

Para ver que $A\hat{B}C$ y $B\hat{C}D$ son semejantes aplicaremos el criterio *AA*. Ambos triángulos tienen un ángulo recto, y comparten además el ángulo *b*. Por lo tanto, son semejantes.

Ahora, $A\hat{B}C$ y $A\hat{C}D$ también tienen un ángulo recto, y comparten el ángulo a, con lo cual son semejantes por el criterio *AA*.



Si observamos la demostración que hicimos cuando bisecamos un segmento, veremos que la recta utilizada era perpendicular a éste. Conviene asignarle un nombre, pues es una recta que nos será útil. Definiremos también la cuerda de una circunferencia

Definición

La recta que biseca a un segmento dado y es perpendicular al mismo se dice su *mediatriz*.

Definición

Una *cuerda* es un segmento que une dos puntos en una circunferencia.

Nuestro objetivo es ver ahora que las mediatrices de las cuerdas son prolongaciones del radio del círculo correspondiente.

Proposición

Sea *AB* una cuerda de una circunferencia. Entonces, la mediatriz del segmento *AB* pasa por el centro del círculo.

Demostración

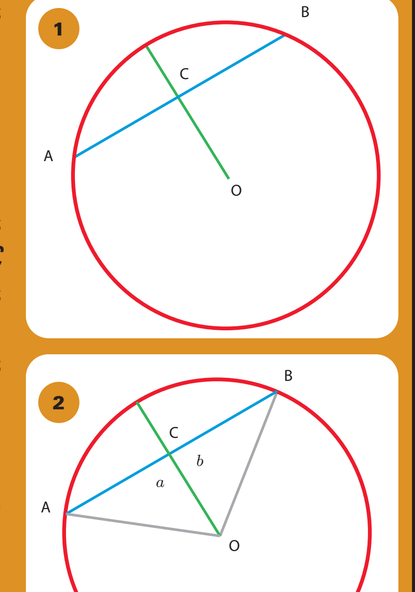
En la figura 1 tenemos la cuerda *AB* y hemos dibujado un radio que pasa por el origen *O* y el punto medio C del segmento *AB*.

Queremos ver que OC es la mediatriz del segmento.

Para esto, trazamos los radios *OA* y *OB*, y nos quedan determinados dos triángulos *AOC* y *BOC* que resultan congruentes por el criterio LLL, pues comparten el lado *CO*, los lados *AO* y *BO* son congruentes por ser radios del círculo, y *AC* es congruente con *CB* pues *C* es el punto medio del segmento *AB* (Figura 2).

En particular, los ángulos indicados como a y b son congruentes, pero entonces deben ser ángulos rectos, ya que juntos totalizan 180°.

Luego, el segmento *OC* biseca a la cuerda *AB* y es perpendicular a la misma, con lo cual es su mediatriz.



Con los últimos resultados estamos en condiciones de hallar el centro de un círculo dado un arco de su circunferencia. Vamos a resolver el problema si conocemos toda la circunferencia, y dejaremos planteado como ejercicio el otro caso.

Problema | Hallar el centro de un círculo dado.

Para determinar el círculo, comenzamos trazando una cuerda arbitraria *AB*. Trazamos su mediatriz, que sabemos que pasa por el centro.

Ahora, por el punto *B* trazamos una perpendicular al segmento *AB*, que corta al círculo en un punto *C* (**ver figura 1**).

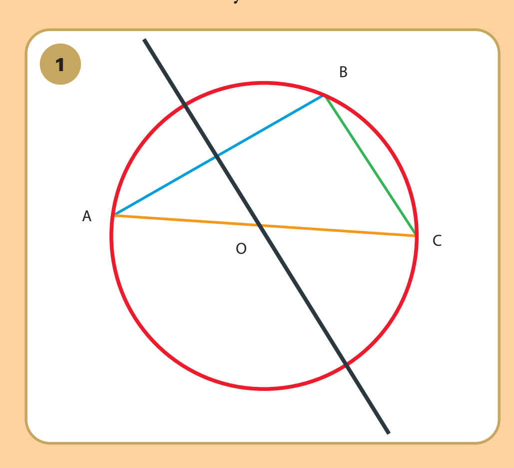
Si podemos demostrar ahora que el segmento *AC* es un diámetro del círculo, como todo diámetro pasa por el centro, y por otra parte el centro está sobre la mediatriz de *AB*, la intersección de *AC* con la mediatriz será el punto buscado.

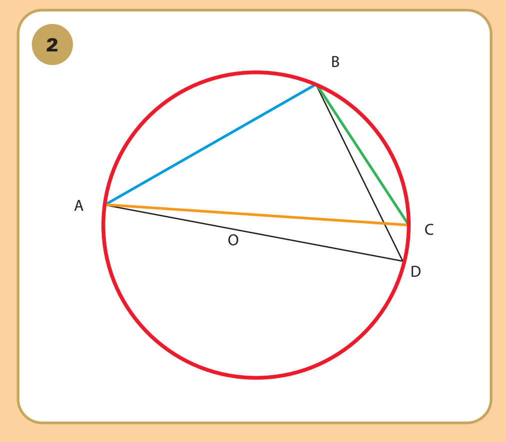
Demostremos entonces que *AC* es un diámetro. Vamos a suponer que no, y llegaremos a un absurdo.

Supongamos que *AC* no es un diámetro, con lo cual podemos trazar el diámetro que pasa por *A* y por el origen, y sea *D* el punto donde se interseca con la circunferencia. Si trazamos el triángulo *ABD* (**ver figura 2**), sabemos que éste es un triángulo rectángulo, como vimos antes.

Pero entonces, tanto la recta *BC* como la recta *BD* forman un ángulo recto con la cuerda *AB*, y si los puntos *C* y *D* fuesen distintos tendríamos dos perpendiculares diferentes por un mismo punto, lo cual es un absurdo.

Entonces, *C* = *D*, y *AC* es un diámetro del círculo dado.





Existe una construcción más sencilla, que sólo requiere una parte de la circunferencia, apenas un arco, como veremos en el siguiente ejercicio.

Ejercicio 6 | **Dado un arco de círculo, determinar su centro.**

Capítulo 3

Trigonometría

Juan Pablo Pinasco

3.1. Razones trigonométricas

Los resultados anteriores de congruencia y semejanza de triángulos tienen numerosas aplicaciones teóricas y prácticas. Veremos en este capítulo las nociones básicas, tal vez las más importantes, de la trigonometría.

Figura 3.1

Consideremos el triángulo rectángulo de la Figura 3.1

Hemos señalado en él un ángulo, que denotamos *a*, y hemos puesto como nombre de los lados las letras *H*, por *hipotenusa*; *CA*, *por cateto adyacente*; y *CO*, por *cateto opuesto*.

Dado cualquier otro triángulo rectángulo, sólo debemos preguntarnos si tiene algún ángulo congruente a *a*. Si lo tiene, por el criterio AA, serán semejantes. Consideremos, entonces, el triángulo de la figura 3.2 que es semejante al inicial de la figura 3.1.

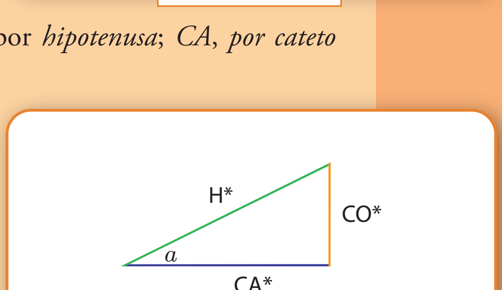


Figura 3.2

Sabemos que sus lados son proporcionales, es decir, las longitudes satisfacen

$$\frac{CA}{CA*} = \frac{CO}{CO*} = \frac{H}{H*},$$

pero podemos escribir estas relaciones entre los lados de otra forma. Igualando de a pares y despejando obtenemos

$$\frac{CA}{CA*} = \frac{CO}{CO*} \quad \Rightarrow \quad \frac{CO}{CA} = \frac{CO*}{CA*}$$

$$\frac{CA}{CA*} = \frac{H}{H*} \quad \Rightarrow \quad \frac{CA}{H} = \frac{CA*}{H*}$$

$$\frac{CO}{CO*} = \frac{H}{H*} \quad \Rightarrow \quad \frac{CO}{H} = \frac{CO*}{H*}$$

En definitiva, dado cualquier triángulo rectángulo con un ángulo *a* fijo, quedan determinados los cocientes de dos de sus lados. Los cocientes son los mismos siempre, y sólo dependen del ángulo *a*, no del triángulo utilizado para calcularlos.

Los cocientes anteriores son las llamadas *razones trigonométricas*, y nos permiten introducir las funciones trigonométricas básicas: el seno, el coseno, y la tangente del ángulo *a*.

$$sen(a) = \frac{CO}{H}$$

$$cos(a) = \frac{CA}{H}$$

$$tg(a) = \frac{CO}{CA}$$

Supongamos, por un instante, que conocemos el valor de las razones trigonométricas para todos los valores del ángulo *a*. Entonces, si nos dan un triángulo rectángulo y la longitud de uno solo de sus lados, podemos averiguar sin dificultad las restantes longitudes. Sólo debemos dividir entre sí las longitudes del lado que conocemos y del que queremos averiguar, y lo igualamos a la razón correspondiente.

Ejemplo: Supongamos que $a = 30°$, con lo cual $sen(30°) = 0{,}5$. Si el cateto opuesto mide 2, ¿cuánto mide la hipotenusa? ¿Se puede averiguar cuánto mide el cateto adyacente?

Solución: sabemos que

$$sen(a) = \frac{CO}{H}$$

con lo cual, reemplazando los datos que tenemos,

$$0,5 = \frac{2}{H}$$

Despejando, $H = 4$.

Para averiguar el cateto adyacente, utilizamos el Teorema de Pitágoras:

$$H^2 = CA^2 + CO^2$$

$$4^2 = 2^2 + CO^2$$

despejamos y $CO = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$.

¿Cuánto vale cos(30°)? | **Ejercicio 1**

Existen distintos problemas donde se puede medir un ángulo y una distancia. Conocer las funciones trigonométricas permite averiguar el resto de las longitudes. Por ese motivo, se tabularon con mucha precisión. A continuación, veremos las unidades utilizadas en la medición de ángulos.

3.2. Unidades de medición de ángulos

La unidad de medida tradicional de los ángulos es el grado, que hemos utilizado ya a lo largo del libro. Dado un segmento, si fijamos uno de sus extremos como centro y lo utilizamos como radio para describir un círculo con un compás, al comenzar el ángulo es de cero grados. Cuando describimos la vuelta completa, el ángulo es de 360°.

Si dividimos el círculo en cuatro partes iguales con dos rectas perpendiculares, al ángulo recto le corresponden 90°. Cada grado se divide a su vez en sesenta minutos, 1° = 60', y a su vez, cada minuto se divide en sesenta segundos, 1' = 60". Este sistema es el llamado *sistema sexagesimal* (de base 60), similar al que empleamos en la división de las horas. En realidad, se supone que se origina en una antigua división del año en 360 días, inspirado en el ángulo que, supuestamente, recorre el Sol cada día en su órbita anual.

¿Se puede dividir un círculo en seis sectores iguales, cada uno de 60°, utilizando sólo la regla y el compás? | **Ejercicio 2**

Existe otra unidad de medida, muy empleada, el *radián*. Para definirlo, consideremos un círculo de radio r = 1 cm. Su perímetro es igual a 2π cm. Un ángulo tendrá 1 radián, si la longitud del arco de circunferencia es 1 cm, (ver figura 3.3).

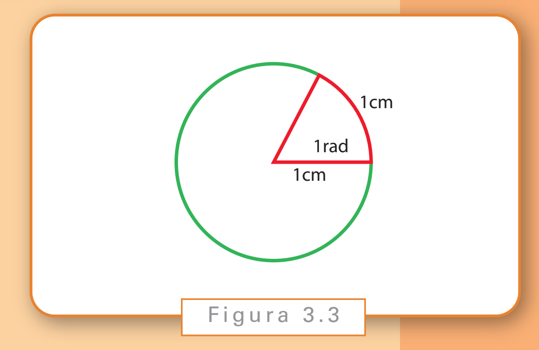


Figura 3.3

La unidad que empleemos para medir el radio no importa, podemos pensar que un ángulo en radianes se obtiene como el cociente de la longitud de su arco y el radio del círculo. Esto es importante porque nos dice que el radián es adimensional, es decir, no tiene asociada una magnitud física, ya que es un cociente de dos longitudes y sus unidades se cancelan. Así, un ángulo de un radián es aquel cuyo arco tiene la misma longitud que el radio del círculo.

Ahora, el equivalente a 360° es 2π radianes. Un ángulo llano tiene 180°, equivalente a π radianes; y un ángulo recto, $\pi/2$ radianes. Como π es un número irracional, no tenemos una expresión exacta para 1°, que en radianes es:

$$1^\circ = 1^\circ \frac{2\pi\, rad}{360^\circ}$$
$$\approx 0,01745\, rad.$$

A la inversa, podemos expresar en grados a cuanto equivale un radián:

$$1\, rad = 1 rad \frac{360^\circ}{2\pi\, rad}$$
$$\approx 57,2958^\circ.$$

Ejercicio 3 **Pasar a radianes los siguientes ángulos 30°, 45°, *x*° donde *x* es un número arbitrario entre 0 y 360.**

Ejercicio 4 **Pasar a grados los siguientes ángulos *π*/3 *rad*; 1,5 *rad*; *y rad* donde *y* es un número arbitrario entre 0 y 2*π*.**

Nuestro objetivo es analizar ahora algunos métodos prácticos para determinar un ángulo.

3.2.1. Instrumentos de medición

Dado un ángulo, se puede utilizar un transportador para medirlo. Lamentablemente, en distintas aplicaciones, no es posible hacer tal medición en forma directa.

Por ejemplo, vemos desde la terraza de nuestro edificio (o el techo de nuestra casa) dos antenas (o dos árboles, u otros dos edificios) y queremos saber el ángulo que forman a la distancia tomando nuestra posición como el vértice. El instrumento más simple que podemos imaginar para hacerlo es una mira que puede girar, ubicada sobre un disco graduado. Apuntamos en una dirección y anotamos el valor del disco, giramos hacia la otra y anotamos el nuevo valor: la diferencia es el valor que buscamos. Este tipo de aparatos se conocen como *goniómetros*, y la mira suele ser un anteojo con aumento.*

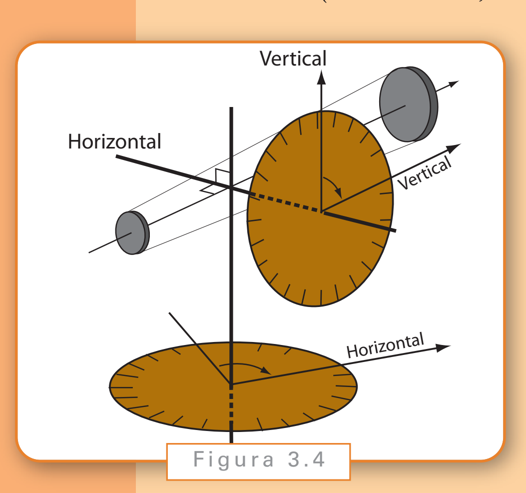


Figura 3.4

Otro aparato indicado para medir ángulos es el *teodolito* (ver figura 3.4). Consiste en un anteojo que puede rotar en dos direcciones, horizontal o vertical, con un disco graduado en cada una para medir el ángulo que rotamos el anteojo en una dirección o en la otra.

* La precisión es tan grande que sirve para medir la separación de las líneas atómicas de distintos elementos químicos. Cuando la luz atraviesa un prisma o una red de difracción se descompone en haces según el color, los cuales forman distintos ángulos con la dirección de incidencia.

El problema que mencionábamos en la introducción, orientarse en un barco en altamar, requería medir el ángulo vertical de determinadas estrellas. Este ángulo varía según qué tan cerca estemos del Ecuador. Para esto, se emplearon diferentes instrumentos (cuadrantes, sextantes, octantes), pero el más elemental de todos fue la *ballestilla*.

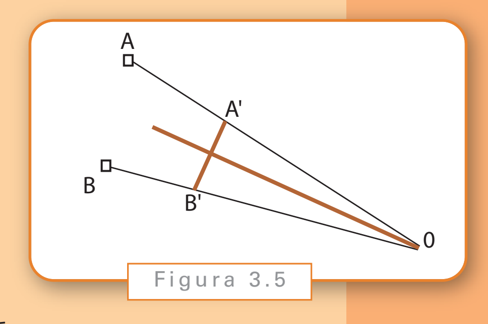


Figura 3.5

Simplemente, una varilla de madera cuyo extremo O se aproximaba al ojo, con otra varilla perpendicular que podía alejarse o acercarse a la vista, y se la movía hasta que sus extremos coincidían con los dos objetos (situados en A y en B) cuya separación angular quería medirse. El ángulo se determina ahora fácilmente a partir del triángulo $OA'B'$, cuyas longitudes se pueden medir, o se leen directamente si la varilla tiene marcas como una regla (ver figura 3.5).

3.3. Las funciones trigonométricas

Nuestro objetivo es analizar las funciones trigonométricas. Para esto, consideremos la figura 3.6. Comencemos por marcar en el plano dos rectas perpendiculares, los ejes X e Y. El punto de intersección será el origen de coordenadas O, y seleccionamos un segmento que consideraremos la unidad de longitud. Este segmento, ubicado en el eje X, irá desde el punto O en un extremo hasta otro a su derecha que señalaremos con 1. Tomando este segmento como radio, describimos un círculo que llamaremos el *círculo unitario*.

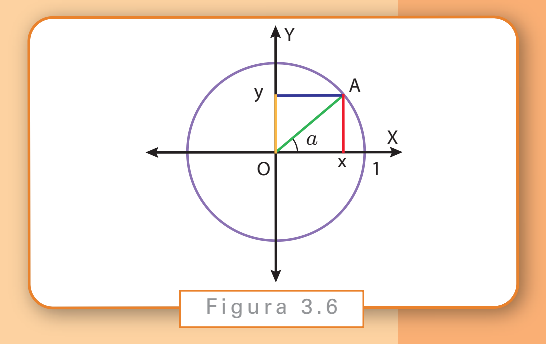


Figura 3.6

Elijamos un punto cualquiera de la parte de la circunferencia que queda en el primer cuadrante (por encima y a la derecha del origen), y llamémoslo A. Al unirlo con el origen determina un ángulo a entre 0 y $\pi/2$. Este punto tiene coordenadas x e y en nuestro sistema de ejes, que se obtienen de la siguiente forma: trazamos la perpendicular al eje X que pasa por el punto elegido, y la intersección de la perpendicular con X nos da el punto x; trazando la perpendicular al eje Y, la intersección de ambos nos da la coordenada y. Observemos que la distancia $\overline{OA}$ está dada por el teorema de Pitágoras, porque se forma un triángulo rectángulo OAx:

$$\overline{OA} = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$\overline{OA} = 1,$$

y es igual a 1 por ser un radio de la circunferencia unitaria. En términos de longitudes, x e y son las longitudes del cateto adyacente y del cateto opuesto, respectivamente.

Ahora, de acuerdo a las relaciones trigonométricas, como la longitud de la hipotenusa es 1, obtenemos

$$
\begin{aligned}
cos(a) &= \frac{\overline{CA}}{H} \\
cos(a) &= \frac{x}{1} \\
cos(a) &= x,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
sen(a) &= \frac{\overline{CO}}{H} \\
sen(a) &= \frac{y}{1} \\
sen(a) &= y.
\end{aligned}
$$

Es decir, $x = cos(a)$, $y = sen(a)$.

Gracias a esto, tenemos una interpretación gráfica del seno y del coseno para cualquier ángulo a en el primer cuadrante. Con esta interpretación podemos demostrar geométricamente la siguiente relación:

Proposición

Sea $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
sen(a) &= cos(\frac{\pi}{2} - a) \\
cos(a) &= sen(\frac{\pi}{2} - a)
\end{aligned}
$$

Demostración

Observemos los triángulos de la figura 3.7. El ángulo correspondiente al vértice O de OAB es a, y el del triángulo $OA'B'$ es $(\frac{\pi}{2} - a)$. Ambos triángulos son congruentes, por el criterio ALA. Veamos porqué:

1. La suma de sus ángulos internos es π, y ambos tienen un ángulo recto (de π/2 radianes).
2. El par de ángulos restante suma entonces π/2 radianes, con lo cual si un ángulo mide a, el otro debe medir $(\frac{\pi}{2} - a)$.
3. La hipotenusa es el lado comprendido entre ambos ángulos (por ser el lado opuesto al ángulo recto).

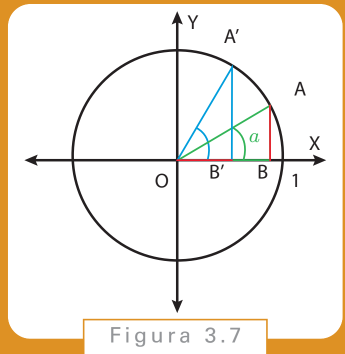


Figura 3.7

Luego, estos ángulos son congruentes, y el lado $\overline{AB}$ (que es el cateto opuesto al ángulo a, y su longitud coincide con $sen(a)$), es congruente al lado $\overline{OB'}$ (que es el cateto adyacente al ángulo $(\frac{\pi}{2} - a)$ y su longitud coincide con $cos(\frac{\pi}{2} - a)$). Entonces,

$$sen(a) = cos(\frac{\pi}{2} - a)$$

La otra igualdad se obtiene considerando los lados congruentes $\overline{OB}$ y $\overline{A'B'}$.

¿Existe también una representación gráfica de la tangente? Si volvemos a su definición, dividimos arriba y abajo por la hipotenusa, y recordamos la definición del seno y el coseno, tenemos

$$tg(a) = \frac{CO}{CA}$$

$$tg(a) = \frac{CO/H}{CA/H}$$

$$tg(a) = \frac{sen(a)}{cos(a)}.$$

Observemos la figura 3.8. Si trazamos la tangente al círculo que pasa por el 1 del eje *X*, hasta que se interseca con la prolongación de la hipotenusa de nuestro triángulo inicial, obtenemos un triángulo que es semejante a éste, ya que tiene dos ángulos congruentes (es un triángulo rectángulo, y comparten el ángulo *a* correspondiente al vértice *O*). Llamemos *z* a la longitud de este lado. Ahora, por la semejanza de triángulos y usando que $y = sen(a)$, $x = cos(a)$, tenemos que

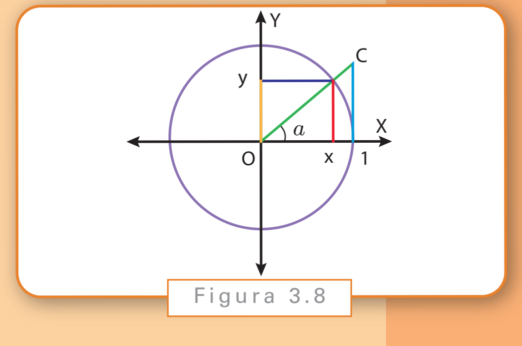


Figura 3.8

$$\frac{z}{1} = \frac{y}{x}$$

$$z = \frac{sen(a)}{cos(a)}.$$

Luego, tenemos una interpretación geométrica para la tangente, que explica incluso su nombre.

Observación: el origen del nombre seno es más complicado. Originalmente, los griegos estudiaron la longitud de la cuerda correspondiente a un ángulo a, y en el siglo V d.C. los hindúes comenzaron a trabajar con la mitad de la cuerda, que correspondía a la mitad del ángulo. (ver la figura 3.9). El término que empleaban fue utilizado luego por los árabes aunque no tenía sentido en esta lengua, y luego, cuando se tradujeron sus obras al latín, lo confundieron con la palabra árabe correspondiente a "cavidad" o "bahía" que en latín se dice "sinus".

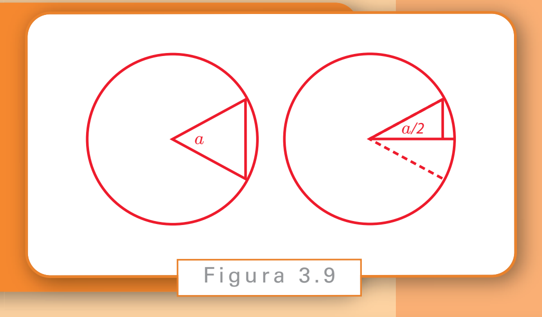


Figura 3.9

Ejercicio 5

Consideremos las funciones trigonométricas recíprocas (secante, cosecante y cotangente), definidas como

$$sec(a) = \frac{H}{CA} \qquad cosec(a) = \frac{H}{CO} \qquad cotg(a) = \frac{CA}{CO}$$

Exprésela en términos de senos, cosenos y tangentes.

Ejercicio 6 | **Representar geométricamente la secante, la cosecante, y la cotangente de un ángulo a**

La construcción geométrica que hemos hecho relacionando $cos(a)$, $sen(a)$ con las coordenadas (x, y) del punto A nos permite extender la definición del seno y el coseno para ángulos que no están entre 0 y $\pi/2$.

Por ejemplo, el ángulo del segundo cuadrante de la figura 3.10 es mayor a $\pi/2$, e igual definimos el seno y el coseno como las coordenadas del punto A. Observemos que, en este caso, el coseno es un número negativo.

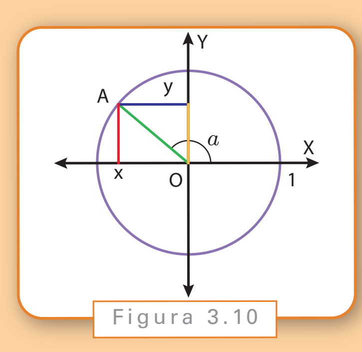


Figura 3.10

Observando con atención la figura 3.10 encontraremos relaciones entre el seno y el coseno del ángulo a y del ángulo $(\pi - a)$ similares a las que vimos antes para a y $(\frac{\pi}{2} - a)$.

Proposición | Sea $0 \leq a \leq \pi$. Entonces,

$$sen(a) = sen(\pi - a)$$

$$cos(a) = -cos(\pi - a)$$

Ejercicio 7 | **Demuestre esta proposición.**

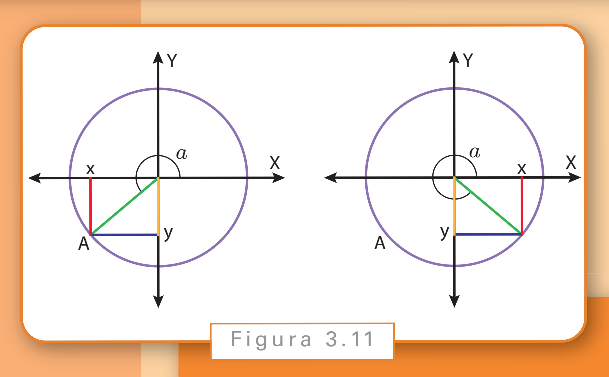


Figura 3.11

De la misma forma, definimos el coseno y el seno de a cuando el ángulo está entre π y 2π, en ambos casos tenemos $cos(a) = x$, $sen(a) = y$ (ver figura 3.11).

Observación: las fórmulas

$$sen(a) = sen(\pi - a), \qquad cos(a) = -cos(\pi - a)$$

$$sen(a) = cos(\tfrac{\pi}{2} - a) \qquad cos(a) = sen(\tfrac{\pi}{2} - a)$$

valen para todo ángulo entre 0 y 2π. La demostración es análoga a las anteriores, y basta considerar siempre el triángulo que queda formado en el cuadrante al cual pertenece el ángulo, que sí es un triángulo rectángulo cuyo ángulo está en el primer cuadrante. No vamos a demostrarlo pues sería repetir los razonamientos anteriores.

3.4. Algunos resultados importantes

Por la forma en que hemos definido las funciones trigonométricas hay dos resultados que se obtienen de inmediato:

Identidad Pitagórica

Para todo ángulo a, $0 \leq a \leq 2\pi$,

$$sen^2(a) + cos^2(a) = 1.$$

Demostración

Observemos que, en el primer cuadrante, $sen(a)$ es el cateto opuesto de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 1, y $cos(a)$ es el cateto adyacente. Por el teorema de Pitágoras, la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa, con lo cual el resultado queda demostrado si $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$.

Si el ángulo es mayor a $\frac{\pi}{2}$, utilizando las proposiciones anteriores, el seno y el coseno del ángulo son congruentes a los catetos de un triángulo rectángulo en el primer cuadrante.

Como podemos ver, este resultado fue una consecuencia del teorema de Pitágoras. Como consecuencia de esta identidad, tenemos la siguiente Proposición:

Proposición

Para todo ángulo a, $0 \leq a \leq 2\pi$,

$$-1 \leq sen(a) \leq 1, \qquad -1 \leq cos(a) \leq 1.$$

Demostración

Vamos a demostrar el resultado para el seno, la otra es idéntica. Por la identidad pitagórica, y usando que un número al cuadrado es positivo,

$$1 = sen^2(a) + cos^2(a) \geq sen^2(a).$$

Ahora, supongamos que el módulo de seno de a sea estrictamente mayor a 1, esto es, $|sen(a)| > 1$.
Entonces,

$$sen^2(a) = |sen(a)| \cdot |sen(a)| > 1 \cdot 1 = 1.$$

Como esta fórmula contradice la anterior (que sabemos que era cierta), hemos obtenido una contradicción. La contradicción vino de suponer que $|sen(a)| > 1$. Entonces, debe ser

$$|sen(a)| \leq 1$$

que es equivalente a

$$-1 \leq sen(a) \leq 1.$$

El próximo resultado explica porqué se acostumbra, en relación a las funciones trigonométricas, medir los ángulos en radianes. Antes, necesitamos algunas desigualdades.

Recordemos, primero, que dado un ángulo de *a* radianes, el arco de la circunferencia unitaria que le corresponde tiene longitud *a* (en las unidades que se trabaje). Observando la Figura 3.8 tenemos las siguientes desigualdades:

$$sen(a) \leq a \leq tg(a)$$

La primera es evidente, observemos que el *sen*(*a*) es la mitad de la cuerda del ángulo 2*a* (como vimos en la figura 3.9), y esta cuerda es más corta que el arco (que mide 2a). Entonces,

$$sen(a) = \frac{1}{2}\text{cuerda del ángulo}2a \leq \frac{1}{2}2a = a.$$

La segunda es ligeramente más complicada: necesitamos utilizar que la fórmula del área del círculo es $\pi \cdot r^2$, donde r es el radio. Aquí, $r = 1$. El área del sector circular de ángulo *a* es *a*/2 (si estamos midiendo en radianes), con lo cual, el área del sector circular es menor que el área del triángulo formado entre el eje *X* (cuya base mide 1), la tangente, y la prolongación de la hipotenusa. Entonces, las áreas nos dan la desigualdad

$$\frac{a}{2} \leq \frac{1 \cdot tg(a)}{2}$$

que es equivalente a la desigualdad buscada, $a \leq tg(a)$.

Claramente, podemos ver en la Figura 3.9 que cuando el ángulo *a* se aproxima a cero, también el seno y la tangente se aproximan a cero. El coseno, en cambio, se aproxima a 1. El siguiente

Teorema *El cociente de sen(a) y a se aproxima a 1 cuando a se aproxima a 0.*

Demostración En las desigualdades que obtuvimos, dividamos todo por *sen*(*a*), y nos queda

$$\frac{sen(a)}{sen(a)} \leq \frac{a}{sen(a)} \leq \frac{tg(a)}{sen(a)}$$

Utilizando que $tg(a) = sen(a)/cos(a)$, y simplificando,

$$1 \leq \frac{a}{sen(a)} \leq \frac{1}{cos(a)}.$$

Esto nos muestra que el cociente es siempre mayor a 1. Pero cuando *a* se aproxima a 0, el lado derecho también se aproxima a 1, porque el coseno se aproxima a 1, y por lo tanto también lo hace el cociente de *a* y *sen*(*a*).

resultado será conocido seguramente para quienes ya han visto el concepto de límite.

Otro resultado importante es conocido como *Teorema del Coseno*. Como veremos, este teorema generaliza el teorema de Pitágoras para triángulos que no son rectángulos, y su

Teorema

Sea el triángulo *ABC* de ángulos a, b, y c, y sean x, y, z las longitudes de los lados. Entonces,

$$z^2 = x^2 + y^2 - 2x \cdot y \cdot \cos(c).$$

Demostración

Consideremos la figura 3.12 para fijar ideas. Trazamos por *C* la perpendicular al lado *AB* que corta en el punto *D*. Tenemos ahora dos triángulos rectángulos, y como vimos al comienzo al introducir las razones trigonométricas, podemos averiguar cuánto miden los lados *AD* y *DB*:

$$\overline{AD} = x \cdot \cos(a), \qquad \overline{DB} = y \cdot \cos(b).$$

Sabemos, además, que

$$z = \overline{AD} + \overline{AD} = x \cdot \cos(a) + y \cdot \cos(b).$$

Multiplicando por z esta última expresión, conseguimos

$$z^2 = x \cdot z \cdot \cos(a) + y \cdot z \cdot \cos(b).$$

Figura 3.12

Trazando las perpendiculares a los otros lados, y haciendo un razonamiento similar, obtenemos dos fórmulas análogas:

$$x^2 = x \cdot y \cdot \cos(c) + x \cdot z \cdot \cos(a).$$
$$y^2 = x \cdot y \cdot \cos(c) + y \cdot z \cdot \cos(b).$$

Por lo tanto, sumando y restando estas expresiones tenemos

$$x^2 + y^2 - z^2 = x \cdot y \cdot \cos(c) + x \cdot z \cdot \cos(a) + x \cdot y \cdot \cos(c) + y \cdot z \cdot \cos(b) - x \cdot z \cdot \cos(a) - y \cdot z \cdot \cos(b).$$

Cancelando y agrupando, queda

$$x^2 + y^2 - z^2 = 2\, x \cdot y \cdot \cos(c),$$

con lo cual el teorema queda demostrado.

principal aplicación es que permite conocer la longitud del tercer lado de un triángulo si conocemos dos de ellos y el ángulo que forman.

Ejercicio 8 | **Demostrar el siguiente teorema:**

Teorema

Sea el triángulo ABC de ángulos a, b, y c, y sean x, y, z las longitudes de sus lados como en la figura 3.12. Entonces,

$$\frac{y}{sen(a)} = \frac{x}{sen(b)} = \frac{z}{sen(c)}.$$

el valor de estos cocientes coincide con el diámetro del círculo que pasa por los tres vértices del triángulo.

Dejamos, como ejercicio, el Teorema del Seno, que se utiliza para determinar los lados restantes de un triángulo cuando se conocen dos ángulos y un lado.

No hemos considerado aún cómo calcular senos y cosenos, salvo que hagamos un gráfico y midamos en él las longitudes. En la práctica, no existen métodos sencillos para calcularlos, pese a que se los utiliza en numerosas aplicaciones. Por ejemplo, el *Almagesto*, el tratado astronómico escrito por Ptolomeo en el siglo II, contiene una tabla de cuerdas calculadas cada medio grado y con cinco decimales de precisión. Como ya mencionamos, la mitad de la cuerda de un ángulo corresponde al seno de la mitad de este ángulo, y puede considerarse entonces la primera *tabla trigonométrica*: una lista de los valores del seno (y del coseno, o la tangente) para muchos valores del ángulo. El armado de estas tablas fue un trabajo complicado pero imprescindible, y fueron sustituidas, recién en las últimas décadas, por las computadoras. Para calcularlas resultan muy útiles las siguientes relaciones que nos permiten obtener senos y cosenos de sumas y restas de ángulos, si bien es un tema que no profundizaremos.

Si nos dan dos ángulos a y *b*, y el valor de sus senos y cosenos, tenemos

$$sen(a + b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$$

$$sen(a - b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$$

$$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$$

$$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$$

Por ejemplo, si conociéramos *sen(1º),* calculamos *cos(1º)* utilizando la relación pitagórica. Luego las fórmulas nos permiten calcular el seno y el coseno de 2º, 3º, 4º, 5º,…. ya que:

$$\begin{aligned} sen(2^o) &= sen(1^o + 1^o) \\ &= sen(1^o)cos(1^o) + sen(1^o)cos(1^o) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} cos(2^o) &= cos(1^o + 1^o) \\ &= cos(1^o)cos(1^o) - sen(1^o)sen(1^o) \end{aligned}$$

(Observemos que conocemos los valores que aparecen en el lado derecho). Seguimos, de la misma manera, calculando los otros valores:

$$\begin{aligned} sen(3^o) &= sen(2^o + 1^o) \\ &= sen(2^o)cos(1^o) + sen(1^o)cos(2^o) \end{aligned}$$

Finalmente, mencionemos las *coordenadas polares*. En general, para situar un punto A en el plano, utilizamos las coordenadas cartesianas y damos valores en los ejes X *e* Y, indicándolo con el par (x, y). Otra posibilidad para indicar un punto del plano es dar los siguientes dos valores:

r = distancia de A al origen

φ = ángulo que forma con el eje X

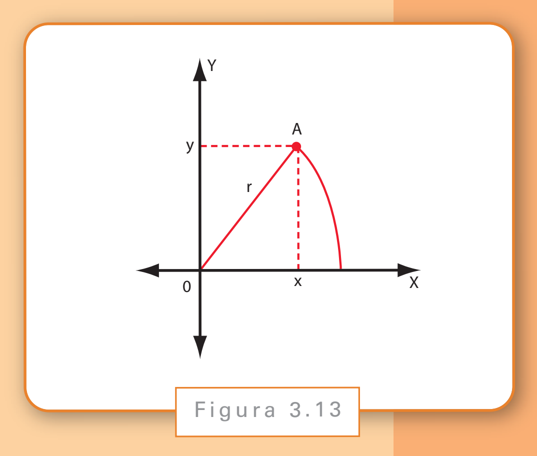


Figura 3.13

El par (r, φ) son las coordenadas polares de un punto A (ver la Figura 3.13). La relación entre las coordenadas cartesianas está dada por las siguientes ecuaciones:

$$x = r \cdot cos(\varphi),$$
$$y = r \cdot sen(\varphi),$$

como puede comprobarse sin dificultad.

Capítulo 4

Aplicaciones

Santiago Laplagne

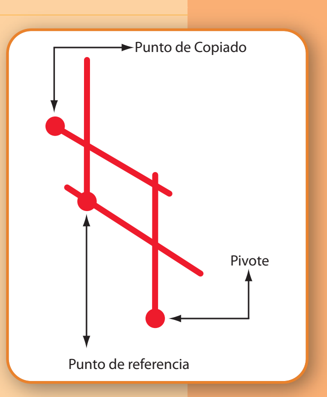
En este capítulo veremos distintas aplicaciones de los teoremas de semejanza de triángulos. A grandes rasgos, podemos clasificarlas en tres grandes grupos: el análisis de transformaciones que mantienen la forma de una figura (como las traslaciones, rotaciones y homotecias), el cálculo de distancias o longitudes que no podemos medir directamente (tales como la altura de un árbol, o el radio terrestre), y el estudio de ángulos inscriptos en una circunferencia (tema que cierra la discusión iniciada al final del segundo capítulo).

Como veremos más adelante, todas estas aplicaciones ilustran conceptos centrales para la resolución del problema de calcular las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

Para tener en cuenta al resolver el problema

4.1. Congruencia

El pantógrafo es un instrumento de dibujo que permite copiar una figura o reproducirla a una escala distinta. Para utilizarlo se fija un punto llamado pivote, y luego se desplaza el punto de referencia sobre el dibujo original, mientras que un lápiz situado en el punto de copiado reproduce la imagen. El dibujo puede estar a una escala menor o mayor dependiendo de las distancias entre el pivote y los puntos de reproducción y copiado.



Vamos a estudiar cómo funciona un pantógrafo, porqué genera una imagen congruente o semejante a la original, y cómo puede construirse uno.

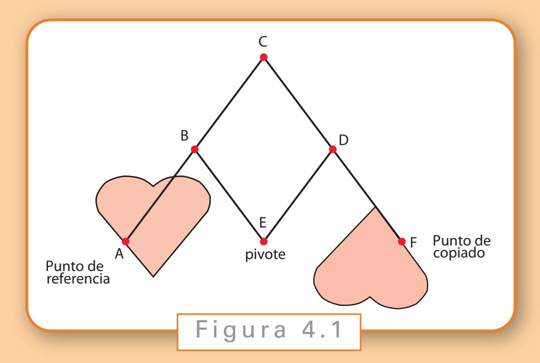


Figura 4.1

Comenzamos analizando el siguiente pantógrafo. Los segmentos AC y CF son iguales. El punto B es el punto medio de AC, y D es el punto medio de CF. Los segmentos BE y ED son iguales a la mitad de los segmentos AC y CF.

En la figura 4.2, vemos cómo funciona el pantógrafo. A medida que

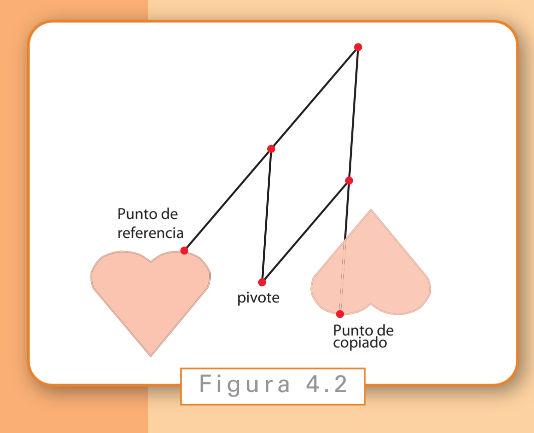


Figura 4.2

desplazamos el punto de referencia sobre el corazón, el pivote queda fijo, y en el punto de copiado se reproduce el corazón.

Para demostrar que es una copia exacta, observemos que las distancias desde el pivote hasta el punto de referencia y desde el pivote hasta el punto de copiado son siempre las mismas. Y además, esos tres puntos están alineados.

La imagen copiada será entonces simétrica a la imagen de referencia, tomando como centro de simetría el pivote.

4.1.1. Simetría central

Veamos primero qué quiere decir que dos figuras sean simétricas.

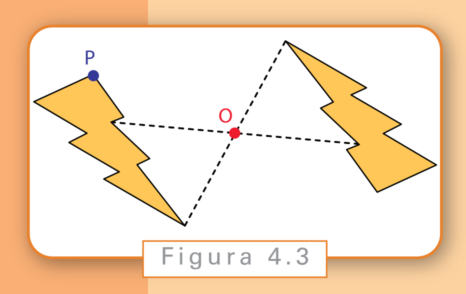


Figura 4.3

Dada una figura en el plano y un punto O, una simetría central de la figura con centro O consiste en asignar a cada punto P de la figura otro punto P' en el plano tal que los puntos P, O y P' estén alineados y además la distancia de P a O sea igual a la distancia de O a P'.

Dos figuras simétricas son iguales, pero giradas 180º.

Por ejemplo, la figura de la derecha es una simetría de la figura de la izquierda con centro O.

Las líneas punteadas muestran los puntos simétricos de dos puntos.

Ejercicio 1 | **En la figura 4.3, ¿cuál es el simétrico del punto P?**

Ejercicio 2 | **En las siguientes casos, ¿cuáles son figuras simétricas con respecto al punto O?**

Figura 4.4

Figura 4.5

Volviendo al pantógrafo, para demostrar que las figuras que se forman son simétricas, tomando el pivote E como centro, tenemos que ver que los puntos A, E y F están alineados y que además AE = EF.

Miremos la figura 4.6:

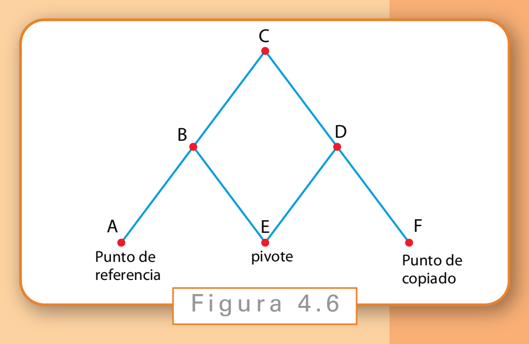


Figura 4.6

Vamos a demostrar primero que los triángulos ABE y EDF son congruentes.

El cuadrilátero BCDE es un rombo porque todos sus lados son iguales (así habíamos elegido los puntos B y D, en la mitad de los segmentos AC y CF, que tenían la misma longitud). Por lo tanto, los lados BC y DE son paralelos. Como los ángulos EDF y BCD son correspondientes entre paralelas, son congruentes. Los ángulos BCD y ABE también son correspondientes entre paralelas y por lo tanto son congruentes. Luego, los ángulos ABE y EDF son congruentes.

Además, sabemos que los lados AB, BE, ED y DF son todos congruentes. Entonces, podemos usar el criterio de congruencia LAL que vimos en el capítulo 2. Luego, los triángulos ABE y EDF son congruentes.

Como los triángulos son congruentes, en particular los segmentos AE y EF son congruentes, como queríamos demostrar.

Nos falta ver que A, E y F están alineados. Para eso, vamos a probar que:

$$B\hat{E}A + B\hat{E}D + D\hat{E}F = 180^o$$

Ya vimos que $D\hat{E}F = B\hat{A}E$. Además $A\hat{B}E = B\hat{E}D$, por ser alternos internos entre paralelas. Tenemos entonces que:

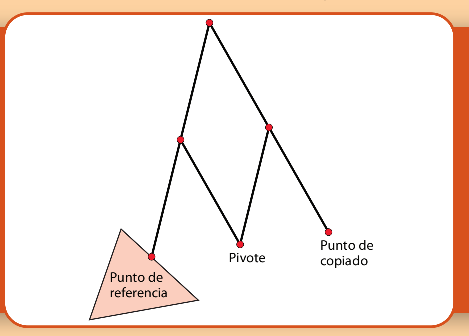
$$\begin{aligned} B\hat{E}A + B\hat{E}D + D\hat{E}F &= B\hat{E}A + A\hat{B}E + B\hat{A}E \\ &= 180^o \end{aligned}$$

donde la última igualdad se obtiene, porque los ángulos del triángulo ABE suman 180º.

Con eso queda demostrado que los puntos A y F son simétricos con respecto al centro E. Por lo tanto, la figura que dibuja el lápiz colocado en F es simétrica a la figura que sigue el puntero colocado en A, y entonces la figura va a ser una copia exacta, aunque girada 180º.

Ejercicio 3

Se utiliza un pantógrafo para reproducir el triángulo de la izquierda. Dibujar como quedará reproducido.



4.1.2. Otras transformaciones: rotaciones

En la sección 1.1 vimos qué es una simetría central. Ésta es un caso especial de una transformación más general del plano, llamada rotación.

Para realizar una rotación también vamos a tomar un punto O que será el centro de la rotación. Dada una figura en el plano, la rotación de esta con centro en O consiste en asignar a cada punto P de la figura un punto P' tal que el ángulo $P\hat{O}P'$ tenga siempre una medida constante, que llamaremos ángulo de la rotación, y además *PO* sea congruente a *OP'*.

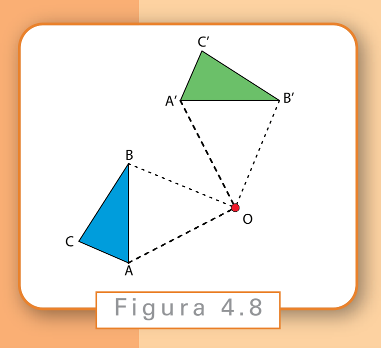


Figura 4.8

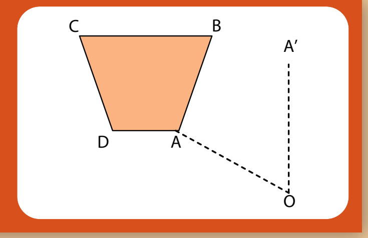
Por ejemplo, en la figura realizamos una rotación del triángulo *ABC* de 90º con centro *O*.

Vemos que los ángulos *AOA'* y *BOB'* miden 90º. (También el ángulo COC' mide 90º.) Además, si tomamos un punto cualquiera en el triángulo ABC y dibujamos su rotación, será un punto en el triángulo A'B'C'.

La rotación, al igual que la simetría, cumple que la figura original y la figura rotada son siempre congruentes.

Ejercicio 4

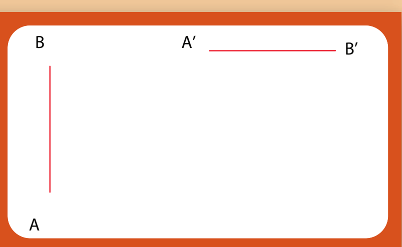
Dibuja la rotación del cuadrilátero ABCD con centro O y ángulo 60º. El punto A ya se encuentra rotado.



Ejercicio 5

Luego de aplicar una rotación al segmento AB se obtuvo el segmento A'B'. ¿Cuál es el centro de rotación? ¿Cuál es el ángulo de rotación?

Sugerencia: Como los segmentos AO y A'O deben ser congruentes, el triángulo AOA' resultará isósceles. ¿Dónde puede estar ubicado el punto O para que esto pase?



Ahora veremos que la simetría central siempre puede ser vista como una rotación. ¿Cuál es el ángulo de la rotación? Vimos que dado un punto P y un centro O, el punto simétrico P' debe cumplir que P, O y P' estén alineados. Por lo tanto, el ángulo que forman es siempre de 180º.

Descubrimos entonces que

La simetría central de centro O es una rotación de 180º con el mismo centro.

Ejercicio 6

En ciertos casos, una figura se puede obtener a partir de otra mediante distintas transformaciones.

Dadas las siguientes figuras, encuentra un centro O para que el cuadrado de la derecha sea una simetría central del cuadrado de la izquierda, con centro O.

Encuentra ahora otro punto O′ para que el cuadrado de la derecha sea una rotación de 90º del cuadrado de la izquierda.

4.2. Semejanzas

Nuestro objetivo es ahora medir la altura de cosas altas. Vamos a ver cómo hacerlo… ¡midiendo la sombra! Realmente es muy simple, porque la sombra de un objeto la obtenemos con la luz del Sol, y si se proyecta sobre el piso, podemos medirla sin mayor dificultad. En la figura 4.12, vemos la sombra de un árbol y de una bandera.

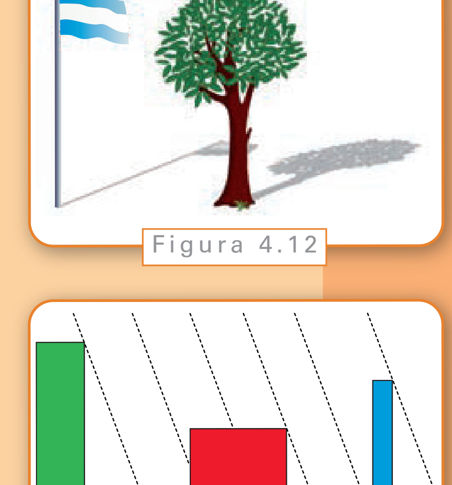

Figura 4.12

Figura 4.13

Cuando tenemos varios objetos, ¿cómo van a ser las sombras? En la figura 4.13 vemos tres objetos diferentes, y las líneas punteadas representan los rayos del Sol. Podemos pensar que los rayos del Sol llegan paralelos a la Tierra.

¿Existe alguna relación entre la altura de los objetos y la longitud de las sombras? Para saberlo, vamos a ver que los triángulos que forman el objeto, la sombra, y los rayos del Sol son semejantes.

En la figura 4.14, los triángulos ABC y PQR son semejantes. Para demostrarlo, usamos que AB y PQ son paralelas, y también lo son PR y AC (los objetos que consideramos se elevan perpendicularmente, no están torcidos ni inclinados). Además B, C, Q y R se encuentran todos sobre la misma recta (la recta del piso). Por lo tanto,

$$P\hat{O}R = A\hat{B}C$$

por ser ángulos correspondientes entre paralelas. Además,

$$B\hat{C}A = O\hat{R}P$$

porque los dos ángulos son rectos.

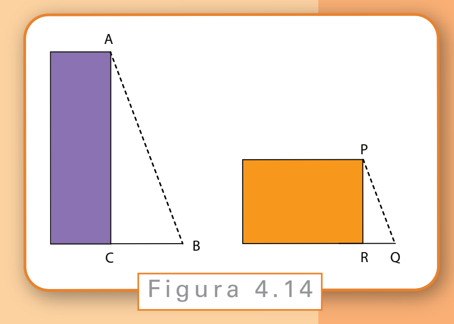


Figura 4.14

Entonces podemos usar el criterio de semejanza de triángulos. ¿De qué nos sirve saber que son semejantes? Porque midiendo la sombra de un objeto del que conocemos la altura, podemos cal-

cular la altura de otro objeto. La idea es similar a la que utilizamos en el capítulo anterior, si bien ahora no vamos a medir los ángulos que se forman para utilizar las razones trigonométricas.

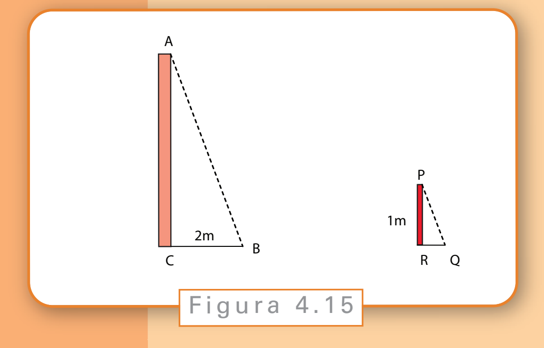


Figura 4.15

Por ejemplo, en la figura 4.15, AC representa el mástil de la bandera y BC es la sombra; PR es un palo de 1 metro de altura y RQ es su sombra.

Si la sombra del palo (RQ) mide 0,4 metros, y la sombra de la pared (BC) mide 2 metros, podemos averiguar la altura de la pared.

Como sabemos que los triángulos son semejantes, usando la razón de semejanza, tenemos que

$$\frac{AC}{PR} = \frac{CB}{RQ}$$
$$= 5$$

dado que 2/0,4 = 5. Despejamos entonces

$$AC = 5\text{m}.$$

¡Ésta es la altura del mástil!

Puede probarse esto con objetos reales. Se puede medir la altura de edificios, árboles o cualquier otra cosa. En los próximos ejercicios vamos a ver algunos ejemplos.

Ejercicio 7

Queremos calcular la altura de un edificio, como el de la figura. ¿Cómo podemos hacerlo? ¿Cómo tenemos que medir la sombra?

Ejercicio 8

En la figura vemos el patio de una escuela, la sombra de las paredes y una persona con su sombra. Conociendo la altura de la persona y la longitud de su sombra, ¿Cómo podríamos calcular la altura de las paredes de la escuela?

Ejercicio 9

Se quiere calcular la altura de una pirámide. Veamos primero el caso en que los rayos del Sol son paralelos a la base de la pirámide.

Para calcular la longitud de la sombra, tendríamos que medir el segmento OP. Pero no podemos meternos adentro de la pirámide. Sin embargo, podemos medir los lados de la base de la pirámide.

Si los lados de la base miden 50 m y la distancia de T a P es de 30 m, ¿cuál es la altura de la pirámide?

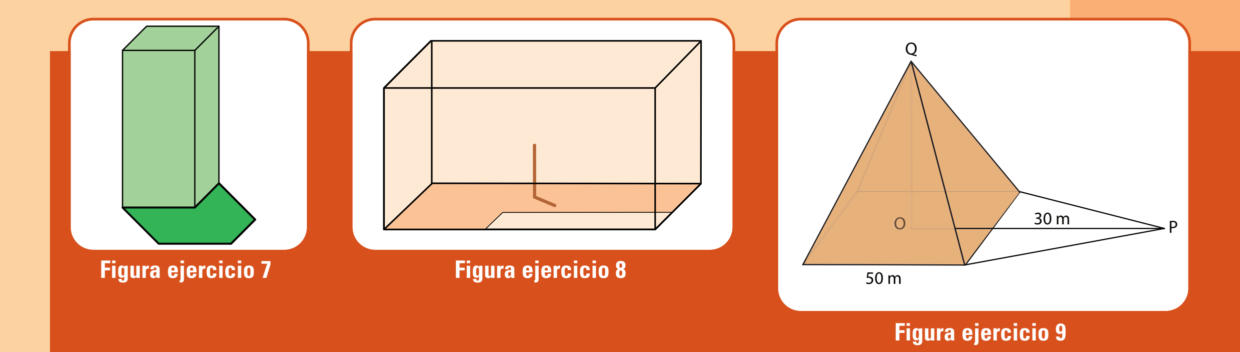


Figura ejercicio 7

Figura ejercicio 8

Figura ejercicio 9

4.3. Homotecias

Nuestro objetivo es ahora armar un pantógrafo que nos va a permitir reproducir imágenes a escala. Es decir, vamos a poder achicar o agrandar las imágenes.


Figura 4.19

Veamos un ejemplo.

El mecanismo es idéntico al visto cuando desarrollamos congruencias, pero intercambiamos la ubicación del pivote y con el punto de referencia.

Cuando movamos el punto de referencia sobre la imagen que queremos reproducir, ¿qué obtendremos en el punto de copiado? Obtendremos la misma figura pero magnificada por 2. En matemática, decimos que hemos hecho una homotecia de razón 2. En las cámaras de fotos o microscopios, diríamos que estamos haciendo un "zoom 2x".

¿Qué es una homotecia?

Dado un punto O del plano, una homotecia consiste en asignar a **cada punto I un punto P en la recta IO de tal forma que PO / IO sea constante.** El cociente PO / IO se llama la razón de la homotecia.

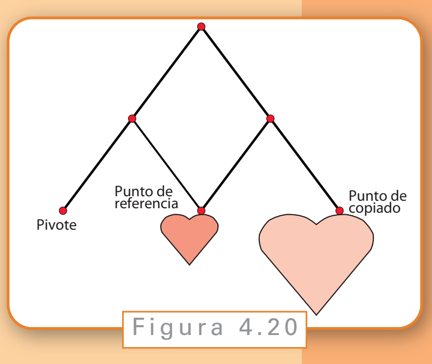


Figura 4.20

En la figura 4.21 vemos qué pasa cuando aplicamos una homotecia de razón ½ a varios puntos y a un segmento S.

Aplicar la homotecia al segmento S, significa aplicarle la homotecia a cada uno de los puntos de este segmento. Obtenemos así un nuevo segmento, paralelo al anterior, cuya longitud es la mitad de la longitud del segmento original.

Para ver que nuestro pantógrafo está haciendo una homotecia, siguiendo la definición, tenemos que ver que O, I y P están siempre alineados y que PO / IO = 2.

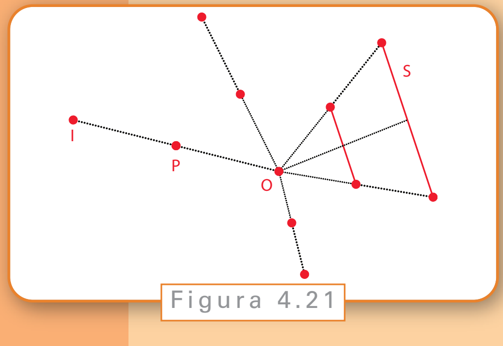


Figura 4.21

Pero esto es exactamente lo que vimos antes (pues sólo hemos intercambiado el pivote y el punto de referencia). Ya habíamos visto que O, I y P estaban alineados y que OI = IP. Por lo tanto, PO / IO = 2 IO / IO
= 2.

¿Qué pasa si queremos agrandar o achicar la imagen en otra razón distinta de 2? Tenemos que adaptar el pantógrafo. Si por ejemplo, queremos hacer un pantógrafo que multiplique por 3, debemos hacer que OP sea 3 veces OI. Obtenemos el pantógrafo de la figura 4.23 (las muescas x2, x3, x4, x5 permiten cambiar la longitud de los segmentos).

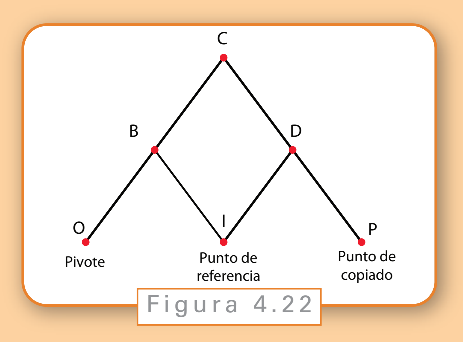


Figura 4.22

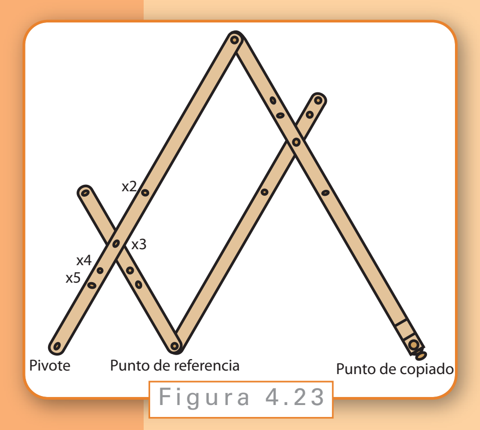


Figura 4.23

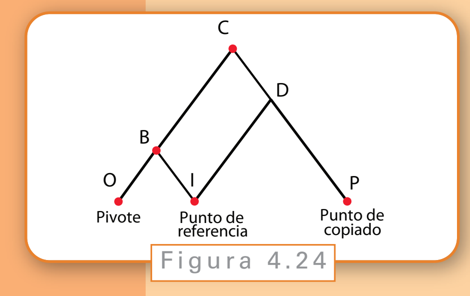


Figura 4.24

Esquemáticamente, tenemos el diagrama de la figura 4.24.

Este pantógrafo está construido de forma tal que BI = CD = BO y BC = DI = DP. Además, BC = 2 CI.

Queremos ver que OP = 3 OI. Para eso, necesitamos probar que IP = 2 OI.

La demostración es similar a las anteriores, y puede hacerse en los siguientes pasos.

BCDI es un paralelogramo.

1. Los ángulos OBI e IDP son congruentes.
2. Los triángulos OBI e IDP son semejantes.
3. La razón de semejanza entre los triángulos IDP y OBI es 2.
4. Los puntos O, I y P están alienados.

Probando esas cinco afirmaciones, vemos que O, I y P están alineados y OP = 3 OI. Por lo tanto, al mover el punto I sobre el dibujo de referencia, el lápiz del punto P va a realizar una homotecia del dibujo de razón 3.

4.4. Ángulos inscriptos

El mural de la Dolorosa, en la iglesia del Pilar, tiene 10 metros de largo. Nos preguntamos desde dónde puede una persona verlo completamente. El campo visual de un ser

humano es de unos 180º. Esto quiere decir que puede ver todo lo que esté delante de él, como ilustramos en la figura de la izquierda.

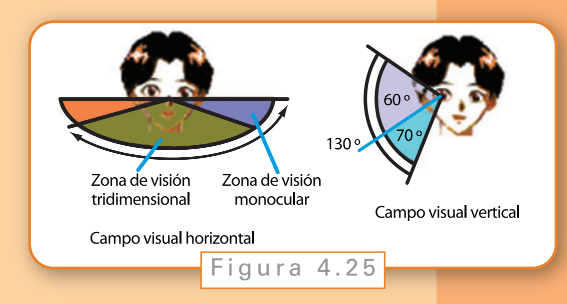
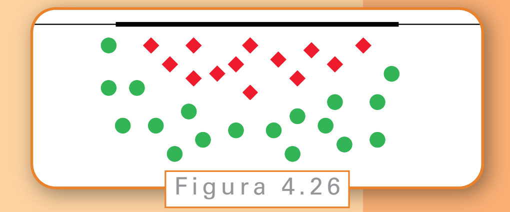


Figura 4.25

Por lo tanto, una persona va a poder ver todo el mural en cualquier lugar en que esté parada. Sin embargo, si cierra uno de los ojos, el campo visual se reduce a unos 150º.

En ese caso, ¿desde dónde podrá ver todo el mural?

Se puede hacer una prueba. Buscar algún mural o una pared larga, y observar desde dónde se puede ver completamente con un solo ojo (se puede mover el ojo hacia los costados, pero no se puede girar la cabeza). Si marcásemos con un círculo los lugares desde donde se puede ver completamente, y con un rombo los lugares desde donde no, obtendríamos algo como la figura 4.26.


Figura 4.26

Tratemos de resolver este problema matemáticamente. Llamemos AB al segmento que representa el mural (ver figura 4.27). Si tomamos un punto P en el plano, podremos ver completamente el mural si el ángulo APB que se forma es menor que 150º. Si es mayor que 150º, el mural no entra en nuestro campo visual.

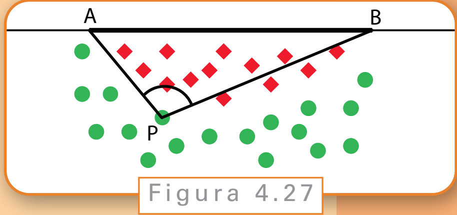


Figura 4.27

Busquemos el borde entre las dos regiones. Es decir, los puntos del plano en los que el ángulo que se forma es exactamente 150º.

Pero, empecemos con algo más fácil. Busquemos los puntos en los que el ángulo es exactamente 90º (ver figura 4.28).

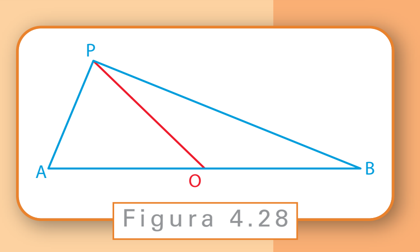


Figura 4.28

Tenemos, como antes, los puntos A, B y P. Llamemos O al punto medio del segmento AB. Entonces sabemos que AO = BO. Vamos a probar que además PO = AO = BO.

¡Veamos una demostración muy ingeniosa! En la figura 4.29, completamos un rectángulo.

Y ya sabemos que las diagonales de un rectángulo son iguales y se cortan en el punto medio, así que AO = PO = BO = QO.

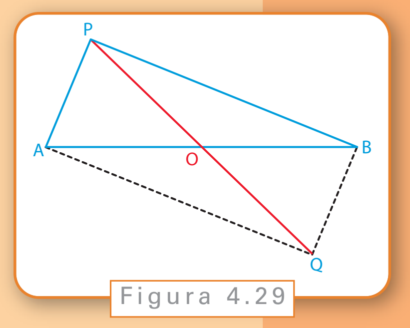


Figura 4.29

Podemos pensar que todos estos segmentos son radios de una circunferencia de centro O (ver figura 4.30). Como A, O y B están alineados, AB es el diámetro de la circunferencia.

¿Qué podemos concluir de todo esto? Si APB = 90º, obtenemos que P se encuentra en la circunferencia de diámetro AB.

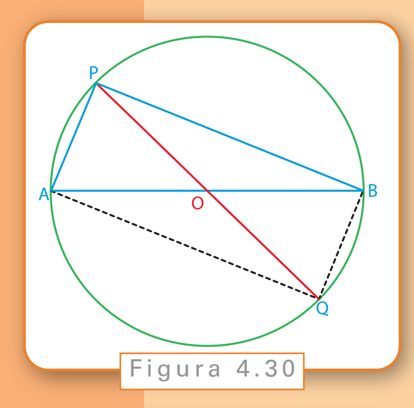


Figura 4.30

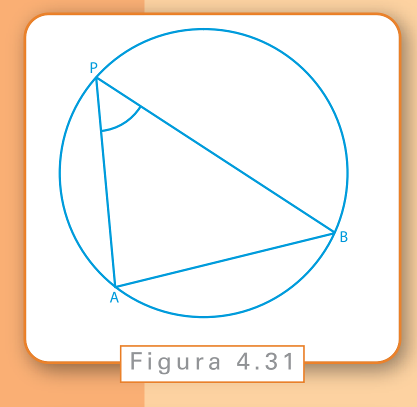


Figura 4.31

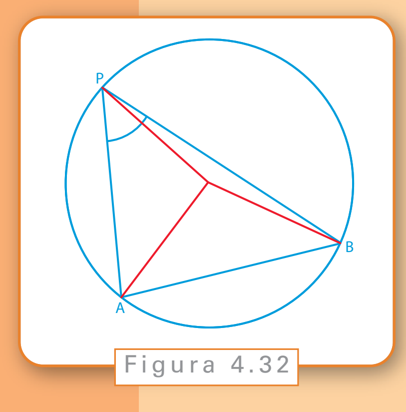


Figura 4.32

Pensemos más en general. Si tenemos un segmento AB, ¿dónde están todos los puntos que forman un cierto ángulo con el segmento?

Vamos a probar que todos esos puntos se encuentran en un arco de circunferencia que pasa por A y B. O podemos mirarlo al revés. En la figura 4.31, tomamos una circunferencia y dos puntos A y B en la circunferencia. Tenemos que probar que para todos los puntos de cada uno de los dos arcos, los ángulos que se forman miden siempre lo mismo.

Tomemos O el centro de la circunferencia (ver figura 4.32). Vamos a probar que el ángulo APB es igual a la mitad del ángulo AOB.

$$A\hat{O}B + A\hat{O}P + B\hat{O}P = 360°$$

Despejando AOB,

$$A\hat{O}B = 360° - (A\hat{O}P + B\hat{O}P)$$

En el triángulo AOP,

$$A\hat{O}P + O\hat{P}A + P\hat{A}O = 180°$$

Pero OPA = PAO, porque OPA es un triángulo isósceles. Entonces

$$2\ O\hat{P}A = 180° - A\hat{O}P.$$

Haciendo lo mismo en el triángulo OBP,

$$2\ O\hat{P}B = 180° - B\hat{O}P.$$

Sumando las dos igualdades,

$$2\ (O\hat{P}A + O\hat{P}B) = 360° - (A\hat{O}P + B\hat{O}P)$$

Y por la igualdad que teníamos al principio,

$$2\ (O\hat{P}A + O\hat{P}B) = A\hat{O}B$$

Si miramos el dibujo, vemos que OPA + OPB = APB. Concluimos que

$$A\hat{P}B = A\hat{O}B\ /\ 2$$

como queríamos.

Entonces, para cualquier punto Q que tomemos en el arco APB, el ángulo AQB va a medir siempre lo mismo.

Regresando a nuestro problema del comienzo de la sección, como el ángulo que abarca uno solo de nuestros ojos es de 150º, nos interesará descubrir en qué puntos P nos podemos ubicar tal que se forma un ángulo APB de exactamente 150º. Todos estos puntos están en un arco como se puede ver en la figura 4.33.

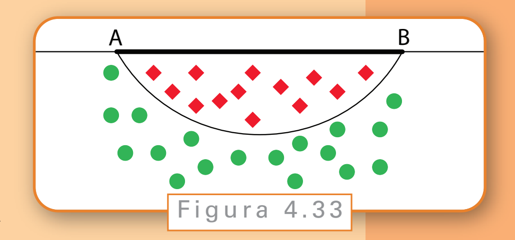


Figura 4.33

Si nos paramos adentro, el ángulo va a ser mayor que 150º, en cambio afuera va a ser menor. ¿Cómo podemos hacer para dibujar ese arco de circunferencia? Nos alcanza con encontrar un punto P que forme un ángulo de 150º con AB y luego trazar la circunferencia que pase por los puntos A, B y P.

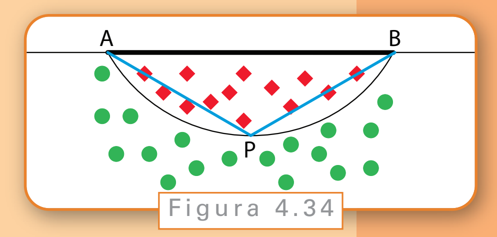


Figura 4.34

Por ejemplo, en la figura 4.34 dibujamos el punto P en el medio del arco

Los ángulos PAB y ABP suman 30º. Como son iguales, cada uno mide 15º. Por lo tanto, podemos trazar las rectas por A y B que forman ángulos de 15º con AB y marcar P en la intersección (ver figura 4.35).

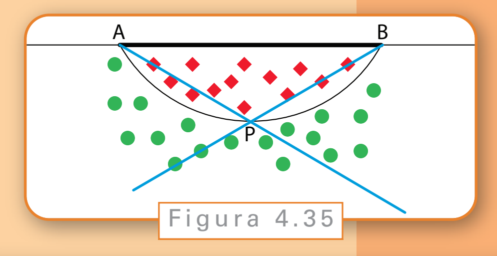


Figura 4.35

Ejercicio 10

El campo visual de los perros es de unos 240º. Por lo tanto pueden ver completamente cualquier pared. Pero, qué pasa con el mural de la figura 4.36, que ocupa dos paredes de un patio. ¿Desde dónde podrán verlo completamente?

Ejercicio 11

En la figura 4.37, probar que los triángulos AQB y CQD son semejantes. ¿Cuáles son los ángulos correspondientes?

Ejercicio 12

En la figura 4.38 , el ángulo DAB = 80º. ¿Cuánto mide el ángulo BCD?

Figuras Ejercicios

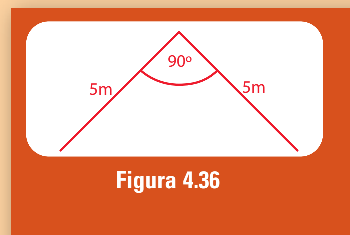


Figura 4.36

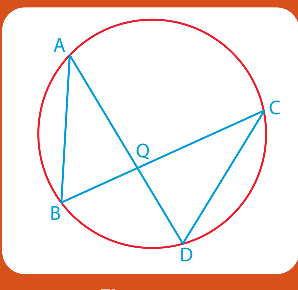


Figura 4.37

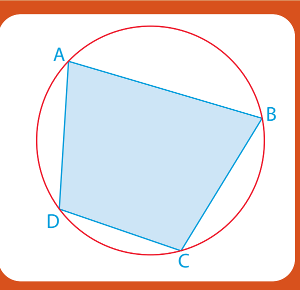


Figura 4.38

4.5. El radio de la Tierra

Problema

Como última aplicación, calcularemos aproximadamente el radio terrestre. Para esto, explicaremos el método que fue utilizado por Eratóstenes en el siglo III a.C. Éste será uno de los datos que utilicemos luego en el capítulo 9, cuando resolvamos nuestro problema principal: estimar la distancia al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

Los elementos de los cuales disponía Eratóstenes para averiguar el radio de la Tierra eran los siguientes:

- conocía la distancia d entre dos ciudades del norte de África (Siena -hoy Assuan- y Alejandría);
- sabía que estas ciudades estaban prácticamente alineadas en la dirección Norte-Sur;
- sabía que en el solsticio de verano (el 21 de junio para el hemisferio Norte), los rayos del Sol al mediodía caían perpendiculares a la Tierra, reflejándose en el fondo de los pozos de agua;
- sabía cuándo era el mediodía en Siena;
- sabía la longitud de un bastón y de la sombra que proyectaba en Alejandría en el mediodía del 21 de junio.

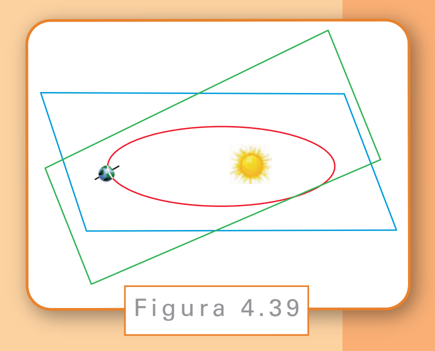
Con estos datos fue capaz de deducir el perímetro de la Tierra y el radio. ¿Son fáciles de obtener? ¿Cómo lo hizo?

Sobre el primer punto no hay mucha información histórica: aparentemente, hizo el camino en carro, con sus esclavos ocupados en contar las vueltas que daba la rueda. El valor calculado difiere según las fuentes, especialmente porque se desconoce el valor exacto de la unidad de medida que menciona (el *estadio*). La distancia entre Alejandría y Siena varía entre 780 y 950 kilómetros, según se utilice el *estadio egipcio* o el *ateniense*; tiene sentido que fuese el primero porque ambas ciudades quedan en Egipto, pero también debe considerarse que estamos hablando de uno de los grandes representantes de la cultura helenística. Vamos a considerar, entonces, que la distancia era aproximadamente de 800 kilómetros.

El segundo punto es más sencillo: sólo requiere salir de Siena y viajar siempre en dirección norte (si llegamos a Alejandría, es porque estaban alineadas en esa dirección). ¿Cómo viajar en dirección Norte? Hoy día es sencillo, y una brújula sería nuestra mejor guía, pero Eratóstenes vivió más de un milenio antes de su invención; en esa época, el mejor método sería viajar de noche orientándose con la estrella polar.

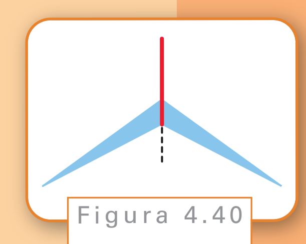
Respecto al tercer punto, profundizar sobre los solsticios escapa de los objetivos de este libro, aunque entenderlos es más una cuestión geométrica que astronómica. La Tierra gira alrede-

dor del Sol en una órbita elíptica, que prácticamente está contenida en un plano. A este plano se lo llama el plano de la eclíptica. Sin embargo, ese plano no está alineado con el plano ecuatorial (es el plano donde vive el círculo que forma el Ecuador en la Tierra, ver la figura 4.39. Para imaginarnos este plano, podemos pensar en la Tierra como una naranja, dibujamos en ella el Ecuador, y la cortamos por este círculo en dos mitades: la superficie de cada mitad es un plano, el llamado plano ecuatorial).


Figura 4.39

Cuando la Tierra gira alrededor del Sol, hay dos oportunidades a lo largo de un año en los cuales pasa simultáneamente por ambos planos (cuando el plano de la eclíptica y del Ecuador se cruzan, y la Tierra pasa por esa intersección). En estas dos ocasiones, el día y la noche duran exactamente doce horas cada uno, y esos los rayos del Sol caen perpendiculares sobre el Ecuador (ocurre el 20 de marzo y el 22 de septiembre, los equinoccios). Luego, como la órbita terrestre está sobre el plano de la eclíptica, se aleja del plano ecuatorial, y cuando ha recorrido un cuarto de la vuelta los rayos caen perpendiculares a los trópicos (al trópico de Cáncer, en el solsticio de verano del hemisferio Norte -que coincide con el solsticio de invierno del hemisferio sur, el día 21 de junio-; o al trópico de Capricornio, en el solsticio de invierno del hemisferio Norte -que coincide con el solsticio de verano del hemisferio sur-, el día 21 de diciembre). Estos dos días, los solsticios, corresponden en verano al día en que la noche es más corta, y en invierno es el día en que la noche es más larga. En la época de Eratóstenes se entendía el papel de los solsticios y los equinoccios en relación a las estaciones, así que no necesitó determinarlos. En cambio, midió el ángulo de inclinación de estos planos (¿Se nos ocurre cómo? Lo veremos en el transcurso del capítulo), cuyo valor es de aproximadamente $23,5°$.

El cuarto punto es sencillo (hoy día que disponemos de relojes), pero también puede determinarse con un reloj de Sol. De todos modos, para armar el reloj de Sol, hay que indicar cuándo es el mediodía, y el procedimiento para hacerlo es el siguiente (observe la figura 4.40): se clava una estaca en la Tierra, y durante el día se marca la sombra que hace; al mediodía no siempre el Sol está perpendicular a la estaca, pero será el momento en que la sombra es más corta; se marca esa dirección, y listo.


Figura 4.40

El quinto y último punto se obtiene midiendo el bastón y la sombra que proyecta al mediodía del 21 de junio.

La figura 4.41 nos muestra un bosquejo de la situación. Hemos indicado con S la ubicación de Siena, con A la de Alejandría, d es la distancia entre ambas, y R es el radio terrestre. Los rayos solares vienen paralelos, y si bien en el punto S no producen sombra, sí lo hacen en A.

Como los rayos son paralelos, la recta formada por el radio terrestre y su prolongación, el bastón, produce ángulos θ iguales (ya que son alternos internos entre paralelas, como

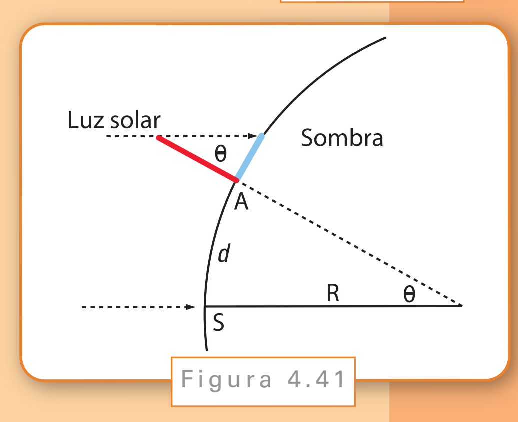


Figura 4.41

Observación
Este es un valor muy cercano al de 6.378 km, que es el radio promedio de la Tierra. Esto sugiere que, efectivamente, utilizó el estadio egipcio como unidad de medida. Sin embargo, en otra de sus obras, cuando calcula la distancia al Sol, si utilizamos el estadio ateniense se obtiene una distancia de 148 millones de kilómetros (un valor muy próximo al verdadero, de aproximadamente 149 millones).

vimos en la Introducción). Podemos averiguar el ángulo θ, recordando del capítulo anterior que

$$tg\,(\theta) = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

y observando que en el triángulo que se forma en A, el cateto adyacente es el bastón, y el opuesto es su sombra. Para averiguar el ángulo, podemos utilizar una calculadora, pero también podemos dibujar a escala el triángulo formado por el bastón y la sombra, y lo medimos con un transportador.

La medición de Eratóstenes dio $\theta = 7{,}2°$, y su razonamiento fue el siguiente:

si a un ángulo de 7,2° le corresponde un arco de 800 *km*,

a uno de 360° le corresponde un arco de $800\ km.\ \dfrac{360}{7{,}2} = 40.000\ km.$

Por lo tanto, el perímetro de la Tierra es de unos 40.000 km, y calculamos su radio utilizando la fórmula para el perímetro de un círculo de radio r:

$$\text{perímetro} = 2\pi \cdot r,$$

$$40.000 = 2\pi \cdot R,$$

donde R es el radio terrestre, y despejamos $R \approx 6.366\ km.$

Ejercicio 13

Para determinar la dirección Norte-Sur, se clavaba un bastón en la tierra antes de mediodía, y se trazaba un círculo tomando su ubicación como centro y su sombra como radio (marcando el punto donde tocaba la circunferencia). Luego, la sombra se acortaba y caía dentro del círculo, hasta que más tarde tocaba nuevamente la circunferencia... ¿Cómo determinaban ahora el Norte?

Ejercicio 14

Si dos ciudades están alineadas de Norte a Sur y en cada una de ellas clavamos un bastón, y medimos su altura y la longitud de la sombra, ¿podemos calcular con esta información el radio terrestre conociendo la distancia entre ellas? ¿Hace falta que sea un 21 de junio o un 21 de diciembre?

Observación: en la Argentina hay numerosas ciudades alineadas que podrían servir para hacer el experimento. Se puede coordinar el momento de la medición para hacerla en simultáneo, pero primero hay que determinar el mediodía solar, que seguramente no coincide con las 12:00.

Capítulo 5

Geometría esférica

Nicolás Santier

5.1. Introducción

Supongamos que miramos el horizonte parados a la orilla del mar, en un día de muy buena visibilidad (digamos, diez mil metros) y nos dicen que a seis kilómetros de allí, en el agua, flota una boya luminosa. ¿Podremos verla desde donde estamos? ¿Y si utilizáramos prismáticos?

Arriesguemos una respuesta, y digamos que sí. Un razonamiento que puede avalar esta impresión es el siguiente. Seis kilómetros son menos que los diez mil metros de visibilidad, así que deberíamos ver la boya, aunque... podemos comenzar a dudar: la boya está a seis kilómetros de nuestros pies, pero nuestros ojos están más altos, supongamos a dos metros de altura (parados sobre algo, si hace falta). En este caso, la distancia d entre nuestros ojos y la boya debe ser mayor. Un esquema de la situación (figura 5.1) y el teorema de Pitágoras deberían convencernos de que no hay problemas para ver la boya.

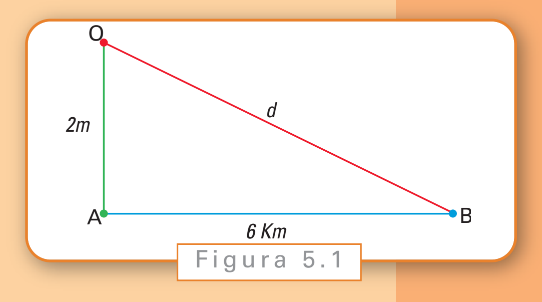


Figura 5.1

En la figura 5.1 *A* es el punto de la playa donde estamos parados, *O* es la ubicación de nuestros ojos, y *B* es la boya. La distancia *d* que queremos calcular es la longitud de la hipotenusa *OB*, y como datos tenemos que 2 metros son 0,002 kilómetros (la longitud del lado *AO*), y la base *AB* mide 6 kilómetros. Ahora, sabemos gracias a Pitágoras que

$$d^2 = 0{,}002^2 + 6^2,$$

Despejando, la distancia *d* que buscamos es, en kilómetros,

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{0,002^2 + 6^2} \\ &\approx 6,00000033\ldots \end{aligned}$$

que no tiene gran diferencia con los seis kilómetros en línea recta.

Bien, entonces la distancia no parece ser un obstáculo para ver la boya. ¿Qué otro problema podría haber?

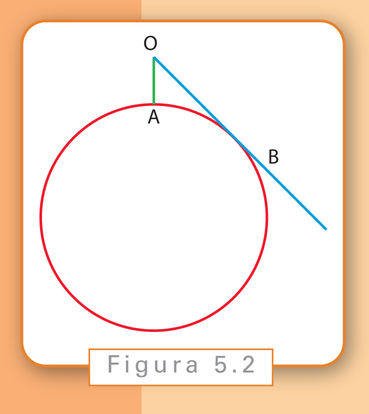


Figura 5.2

Pensemos un momento antes de responder. El dibujo anterior no representa exactamente la realidad. Sabemos que la Tierra es aproximadamente esférica, con lo cual la base *AB* no debería ser recta, sino curva. ¿Tendrá influencia este hecho? La Figura 5.2 debería convencernos de la importancia de que la superficie de la Tierra sea curva.

¡Observemos que si la boya está debajo del punto donde se tocan la recta y la circunferencia, no la podemos ver! Esto nos debe resultar creíble, porque no podríamos verla si estuviera en nuestras antípodas, del otro lado de la Tierra. Debe haber un punto donde las cosas queden debajo de nuestra línea de visión. Aquí, la pregunta es si está antes o después de los seis kilómetros en donde está ubicada la boya.

Por lo tanto, la curvatura terrestre no debe descartarse tan rápido, porque genera distintas dificultades. El objetivo de este capítulo será reconocer esas dificultades e intentar superarlas. En principio podemos plantear una pregunta muy sencilla, quizá la pregunta más sencilla:

- ¿qué quiere decir que la boya está a seis kilómetros?

En este caso, nos estamos preguntando, ¿cómo medimos distancias sobre superficies curvas? En el plano, la distancia entre dos puntos se calcula midiendo la longitud del segmento que los conecta, y es suficiente con moverse en línea recta de un punto al otro. Sin embargo, esto genera un nuevo problema:

- ¿cuál es el equivalente a moverse en línea recta sobre la esfera?

Para tener en cuenta al resolver el problema

Cuando no podemos medir las distancias concretamente porque son demasiado grandes, por ejemplo la distancia entre la Tierra y la Luna o la distancia entre dos ciudades de la Tierra, usamos las herramientas de la trigonometría, como por ejemplo, el teorema de Pitágoras o los teoremas de equivalencias de triángulos, que valen en un plano esto es, en un espacio llano. Aquí debemos trabajar sobre una esfera, que no es llana. Por lo tanto, estas herramientas de la trigonometría clásica no sirven y debemos desarrollar nuevas adaptadas a la esfera.

Con todas esas herramientas estaremos en condiciones de resolver el problema que planteamos al comienzo del capítulo.

En este capítulo, también veremos las nociones de paralelismo sobre una esfera, y los problemas que causa la curvatura a la hora de trazar mapas, como así también las principales proyecciones utilizadas en su trazado. Si bien estos problemas no tienen relación

directa con la situación problemática planteada en el comienzo, son aplicaciones clásicas de la geometría y la trigonometría esférica útiles desde un punto de vista tanto práctico (las mapas de la Tierra son esenciales para cualquier viajero) como teórico (los espacios curvos son fundamentales en física: la teoría de la relatividad general elaborada por Albert Einstein al principio del siglo XX afirma que el universo no es llano).

Como introducción a este tema, consideremos el siguiente problema, variante de uno muy conocido: un cazador sale de su carpa y ve un oso en dirección sur. Apuntando con una escopeta al punto donde vio el oso, camina diez pasos en dirección sur, pero como ahora no lo ve, dobla hacia el oeste y camina otros diez pasos con el caño de la escopeta descansando sobre el brazo izquierdo (sigue apuntando hacia el sur). Luego, camina diez pasos en dirección al norte, ahora con la escopeta sobre el hombro apuntando hacia atrás. Tras dar esos diez pasos, volvió al punto de partida.

El problema clásico no menciona la escopeta, y pregunta: ¿de qué color era el oso? Vamos a hacer, en cambio, otra pregunta: cuando llega a la carpa, ¿está la escopeta apuntando en la misma dirección que cuando salió?[1]

Veremos más adelante las herramientas necesarias para resolver este problema (ver la sección sobre la holonomía). Por el momento podemos obtener una idea intuitiva de la respuesta tomando una pelota para representar la Tierra y un fósforo o una ramita como escopeta, y reproducir la situación saliendo del punto equivalente al Polo Norte. En este caso, observaremos que al regresar al punto de partida el fósforo apunta en otra dirección, el ángulo correspondiente al desplazamiento de este a oeste.

En algunas partes de este capítulo utilizaremos conceptos de análisis, tales como la derivada o la integral. Quienes no hayan estudiado aún estos conceptos no comprenderán determinados resultados aislados, ya que no existe otra forma de expresarlos, pero no afectará la lectura del capítulo.

Una imagen útil para tener en mente cuando se mencionen en el texto el vector tangente a una curva o la derivada de la curva, es la siguiente: cuando un móvil está obligado a moverse siguiendo una curva determinada, y de golpe se lo libera, sale despedido en una recta que es la tangente a la curva en la cual se desplazaba (después, por supuesto, cambia su dirección por efecto de la gravedad, y cae). Un ejemplo sencillo es hacer girar una cuerda con una piedra atada en un extremo: cuando la soltamos, sale en línea recta. Otro ejemplo son los saltos que hacen los motociclistas o los esquiadores en una rampa. Y la derivada nos dice la velocidad que lleva el móvil.

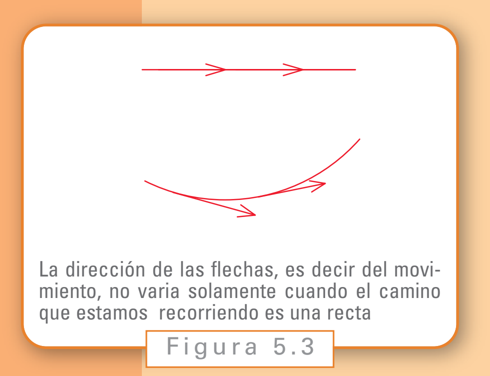
5.2. Caminar derecho sobre una esfera

Queremos hacer geometría sobre una esfera, es decir, estudiar figuras formadas con puntos, rectas y círculos, pero sobre la superficie de una esfera. Esta es una geometría que vale la pena estudiar dado que, es la geometría que describe mejor la superficie de la Tierra.

[1] La respuesta al problema clásico es que el oso es blanco, pues sólo cerca del Polo Norte se puede dar esta situación.

En los capítulos anteriores trabajamos en el plano o en el espacio. Debemos empezar por definir qué es, sobre la esfera, el objeto geométrico más básico después del punto: la recta. Vamos a analizar qué es esencialmente una recta en el plano, para definir su análogo sobre una esfera.

Supongamos que somos un pequeño insecto bidimensional, es decir, que se puede mover únicamente en el plano. Podemos avanzar, retroceder, y girar, pero no saltar o elevarnos; no tenemos siquiera la intuición de que existe la altura. Si comenzamos a movernos, ¿cómo podemos decidir si el camino que estamos siguiendo es una recta? Una posibilidad sería la siguiente: tendremos la sensación de andar derecho si la dirección de nuestro movimiento no cambia, es decir, si las direcciones de nuestro movimiento en un instante y en cualquier otro instante posterior son iguales (ver figura 5.3).



La dirección de las flechas, es decir del movimiento, no varia solamente cuando el camino que estamos recorriendo es una recta

Figura 5.3

Imaginemos ahora la misma experiencia sobre una esfera: somos el mismo insecto bidimensional caminando sobre la superficie de una pelota. Sentimos que caminamos derecho, es decir que el camino es una recta, si la dirección de nuestro movimiento coincide siempre con la que estamos siguiendo. Una forma matemática de expresarlo que involucra derivadas (un concepto que no todos han visto aún), sería decir que estamos caminando derecho si se anula la derivada del vector que da la dirección de nuestro movimiento (el vector tangente a la curva que estamos recorriendo cuando lo derivamos en la direccion de sí mismo); esto es, que este vector no varía a lo largo de la caminata.

Podemos ver que los caminos derechos son exactamente los círculos máximos o grandes círculos, es decir, las curvas que se obtienen como intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera (ver la figura 5.4). Llamaremos entonces rectas a estos círculos máximos, y únicamente a ellos.

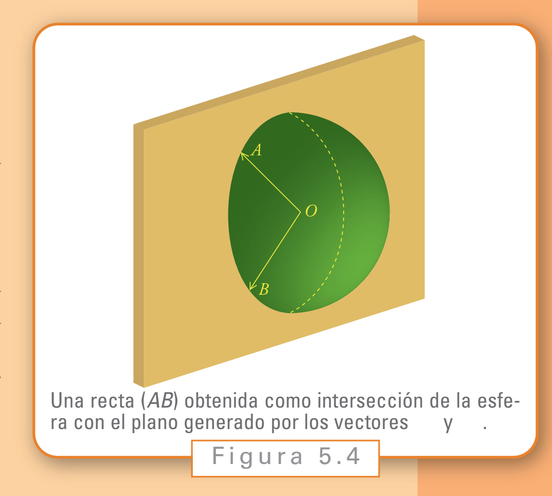
Definición 2.0.1. Una recta que pasa por dos puntos *A* y *B* de una esfera de centro *O* es por definición un círculo máximo determinado por *A* y *B*, esto es, la curva que se obtiene como intersección de la esfera con el plano generado por los vectores y .

Ejercicio 1 **Probar que si dos puntos de una esfera no son diametralmente opuestos, entonces pasa por ellos exactamente un círculo máximo. Probar que si son diametralmente opuestos, pasan infinitos círculos máximos (ver la figura 5.5).**

Observemos que dos rectas (es decir, dos grandes círculos) distintas tienen siempre, exactamente, dos puntos de intersección diametralmente opuestos (ver la figura 5.5). Estas son las primeras grandes diferencias entre la geometría esférica y la geometría plana: mientras en el plano dos rectas paralelas distintas nunca se cortan, **dos rectas sobre una esfera siempre se cortan.** Y en el plano, si dos rectas distintas se cortan, lo

hacen en un único punto, **aquí se cortan dos veces.** Notemos también que por dos puntos diametralmente opuestos pasan una infinidad de rectas, mientras en el plano por dos puntos distintos pasa una única recta.

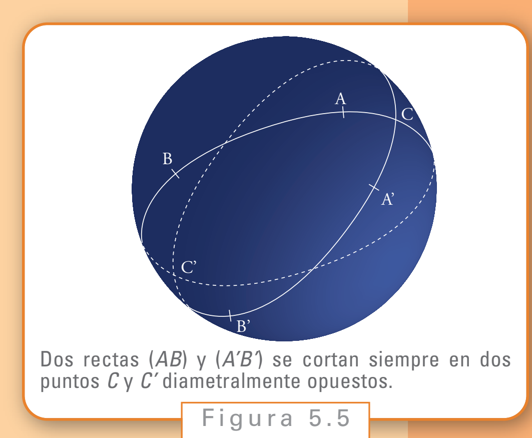
Otra manera de llegar a considerar los círculos máximos como el análogo sobre la esfera de las rectas de la geometría plana, es recordar que en el plano una recta que pasa por dos puntos es el camino más corto entre estos puntos. Se puede definir una manera de medir la longitud de una curva sobre una esfera a partir de la distancia usual del espacio y utilizar ésta para definir la distancia entre dos puntos. Ocurre que los círculos máximos son los caminos más cortos para esta distancia. Para visualizar eso, podemos tomar una pelota de tenis y pasarle un elástico. El elástico va a intentar moverse para minimizar su tensión. Si lo ponemos a lo largo de un círculo máximo, no se va a mover, pero si lo ponemos según cualquier otro camino sobre la pelota, va a deformarse.



Una recta (*AB*) obtenida como intersección de la esfera con el plano generado por los vectores y .

Figura 5.4

Definimos la distancia $d(A,B)$ entre dos puntos A y B de una esfera como la longitud de la porción más chica de un círculo máximo que pasa por A y B (como demostramos en el ejercicio anterior, este círculo máximo es único si A y B no son diametralmente opuestos -también llamados antipodales-, es decir si A y B no son simétricos con respecto al centro O de la esfera. Por ejemplo, el polo norte y el polo sur son antipodales, pero Buenos Aires y Nueva York no).



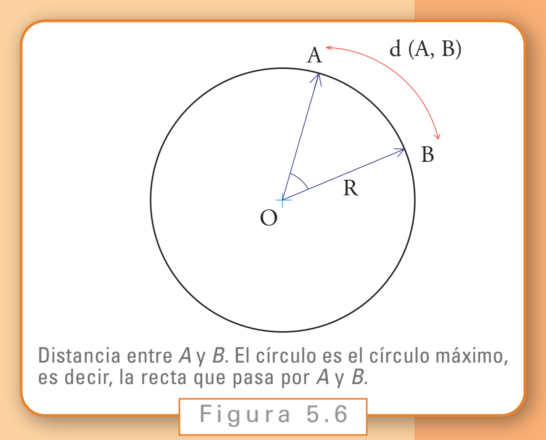
Dos rectas (*AB*) y (*A'B'*) se cortan siempre en dos puntos *C* y *C'* diametralmente opuestos.

Figura 5.5

Si la esfera tiene radio R y centro O, entonces

$$d(A,B) = R(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \qquad \textbf{(2.1)}$$

donde $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ es el ángulo medido en radianes entre los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OB}$. En general, trabajaremos en la esfera unitaria, tomando $R = 1$, e identificaremos la distancia entre A y B con el ángulo $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.



Distancia entre *A* y *B*. El círculo es el círculo máximo, es decir, la recta que pasa por *A* y *B*.

Figura 5.6

Cuando A y B son diametralmente opuestos, entonces $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \pi$ y obtenemos $d(A, B) = \pi R$, es decir, la mitad del perímetro de un círculo (máximo) de radio R.

Observemos que hemos definido una función *d*, que llamamos distancia, pero no sabemos aún si verifica las propiedades que se requieren de una distancia. Éstas son las siguientes:

- d(A,B) = $d(B,A)$, es decir, la distancia es simétrica;
- d(A,B) = 0 si y solamente si $A = B$; y
- d(A,B) ≤ $d(A,C) + d(C,B)$, la desigualdad triangular. Esta la veremos más adelante.

Ejercicio 2 **Si consideramos que la Tierra es una esfera de radio R = 6.378 km, ¿cuánto vale la distancia entre el Polo Norte y el polo sur? ¿Y entre el Polo Norte y una ciudad ubicada en el Ecuador?**

Ahora, podemos contestar a la pregunta de la introducción: si estamos a la orilla del mar, ¿podemos ver una boya situada a 6 km de la playa? Ya sabemos que el camino más corto para llegar a la boya es el único círculo máximo que pasa por el lugar donde estamos parados y por la boya. Consideremos la figura 5.7 donde R = 6.378 km es el radio aproximado de la Tierra, el punto $b = R$ + 2m representa nuestros ojos.

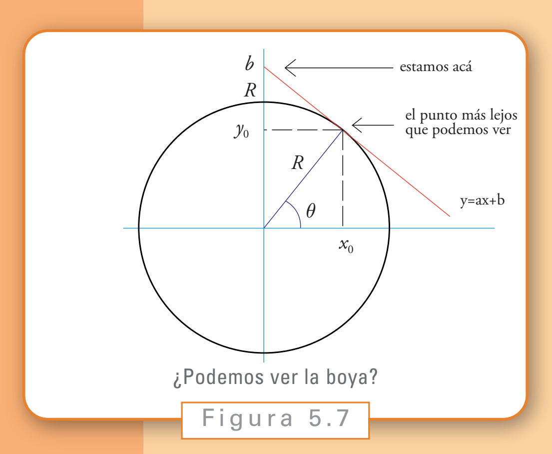


Figura 5.7

Buscamos primero la pendiente a de la recta que representa nuestro campo visual y las coordenadas (x_0, y_0) del punto más lejos que podemos ver. Como este punto pertenece a la recta de ecuación $y = ax+b$ y al círculo centrado en el origen de radio R = 6.378 km, cuya ecuación es:

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

tenemos que sus coordenadas cumplen simultáneamente

$$y_0 = ax_0 + b \quad \text{y} \quad x_0^2 + y_0^2 = R^2.$$

Luego, reemplazando y_0, tras desarrollar el cuadrado y agrupar los términos, obtenemos una ecuación cuadrática

(2.2) $$x_0^2 + (ax_0 + b)^2 = R^2 \Leftrightarrow (1 + a^2)x_0^2 + 2abx_0 + b^2 - R^2 = 0.$$

El punto x_0 es una raíz de la ecuación cuadrática. Recordemos brevemente que, dada una ecuación

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

sus raíces están dadas por

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

si $B^2 - 4AC \geq 0$

En particular, ambas raíces son iguales si y sólo si el discriminante $\Delta = B^2 - 4AC$ se anula.

La pendiente *a* de la recta es tal que esta recta corta en un único punto al círculo, lo que se traduce matemáticamente en el hecho de que la última ecuación tiene una única raíz, y su discriminante Δ es nulo:

$$0 = \Delta = (2ab)^2 - 4(1 + a^2)(b^2 - R^2)$$

$$= 4R^2a^2 - 4(b^2 - R^2).$$

Luego, despejando nos queda

$$a^2 = \frac{b^2 - R^2}{R^2}$$

$$a^2 = \left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1}.$$

Obtenemos así dos rectas posibles que son simétricas con respecto al eje y. Como el problema es simétrico con respecto a este eje podemos, sin perder en generalidad, suponer que la recta que buscamos tiene pendiente a negativa como en la figura 5.7. Luego tomamos

$$a = -\sqrt{\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1}.$$

Volviendo a la ecuación cuadrática, y recordando que el discriminante es nulo, tenemos

$$x_0 = \frac{-2ab}{2(1 + a^2)}$$

$$= \left(\frac{R}{b}\right)^2 b\sqrt{\left(\frac{b}{R}\right)^2 - 1}$$

$$= R\sqrt{\left(1 - \frac{R}{b}\right)^2}.$$

Por otro lado, como $x_0 = R\cos\theta$, igualamos ambas y nos queda

$$\cos\theta = \sqrt{\left(1 - \frac{R}{b}\right)^2},$$

con lo cual podemos calcular el ángulo como

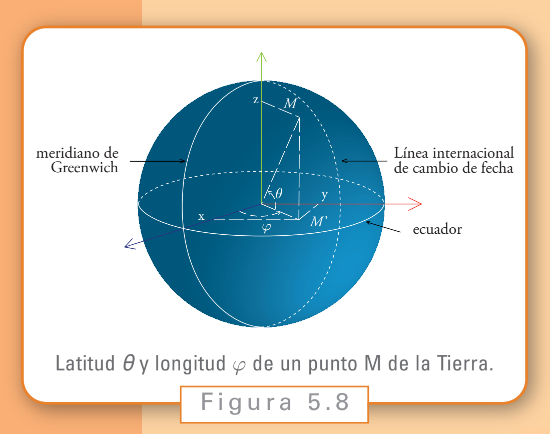
$$\theta = \arccos \sqrt{\left(1 - \frac{R}{b}\right)^2}.$$

Estamos en condiciones de calcular el ángulo, ya que conocemos $R = 6.378$ km y $b = R + 0{,}002$ (suponemos que nuestros ojos están a 2 m de altura). Utilizando una calculadora obtenemos $\theta \approx 1{,}57$, con lo cual el punto más lejano que podemos ver está situado a una distancia aproximada de $(\frac{\pi}{2} - \theta)\, R = 5{,}0509$ km. Por lo tanto, no podemos ver la boya pues está a 6 km de la orilla.

Para poder calcular las distancias entre dos puntos cualesquiera de la Tierra necesitamos una manera de ubicarlos con precisión. En el plano utilizamos dos ejes perpendiculares, el eje x y el eje y, e indicamos las coordenadas en cada uno. En la esfera es similar, y lo vamos a hacer usando dos rectas particulares de la Tierra, el Ecuador y el meridiano de Greenwich, lo que nos lleva a las nociones de latitud y longitud de un punto.

5.3. Latitud y longitud

Ubicar un punto de la Tierra con su latitud θ y longitud φ, significa ubicarlo con respecto al Ecuador y al meridiano de Greenwich (este último es el segmento que une los polos y que pasa por el observatorio de Greenwich en Inglaterra). El meridiano de Greenwich define el este y el oeste. Su simétrico con respecto al centro de la Tierra, es decir, el segmento que une los polos y pasa por el punto opuesto a Greenwich con respecto al centro de la Tierra, es la línea internacional de cambio de fecha. La elección de este meridiano como punto de referencia para medir la longitud es arbitraria. De hecho, hasta 1884 el meridiano de referencia pasaba por París.



Latitud θ y longitud φ de un punto M de la Tierra.

Figura 5.8

Vamos a considerar la Tierra como una esfera de radio $R = 6.378$ km. (es una aproximación, pues en realidad la Tierra es más llana en los polos que en el Ecuador). Introducimos un sistema de coordenadas x, y, z centrado en el centro de la Tierra como en la figura 5.8. Por ejemplo, el Polo Norte tiene por coordenadas $(0, 0, R)$.

Sea un punto M de la Tierra de coordenadas (x, y, z). Para determinar su latitud y longitud consideramos la proyección M' de M sobre el plano xy. Entonces M' tiene por coordenadas $(x, y, 0)$. La longitud φ de M es el ángulo entre $\overrightarrow{OM'}$ y el eje Ox es decir entre $\overrightarrow{OM'}$ y el plano que contiene al meridiano de Greenwich. Su latitud θ es el ángulo entre $\overrightarrow{OM}$ y $\overrightarrow{OM'}$, es decir entre $\overrightarrow{OM}$ y el plano ecuatorial. Entonces $\varphi \in (-\pi, \pi)$ y $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$. La longitud de los polos no puede ser definida.

Probar que las coordenadas (*x, y, z*) de un punto M de longitud φ y latitud θ son ($R\cos\theta \cos\varphi$, $R\cos\theta \,\text{sen}\varphi$, $R\text{sen}\theta$). **Ejercicio 3**

Así, ubicamos cualquier punto de la Tierra, sin ambigüedad, con su latitud y longitud. Esto se traduce, matemáticamente, en que disponemos de una aplicación $f: S \longrightarrow (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$ que a un punto M de la esfera S, que no sea un polo y que no pertenezca a la línea internacional de cambio de fecha, asocia su par latitud-longitud (θ, φ) que llamaremos coordenadas esféricas de M. No consideramos los puntos M de la línea internacional de cambio de fecha porque queremos que esta aplicación sea continua, es decir, que si nos estamos acercando a algún punto de coordenadas (θ, φ) con una sucesión de puntos de coordenadas $(\theta_1, \varphi_1), \ldots, (\theta n, \varphi n), \ldots$ queremos que las latitudes y longitudes de nuestras sucesivas posiciones sean aproximaciones cada vez mejores de (θ, φ). Esto se escribe de la siguiente forma: $\theta n \longrightarrow \theta$ y $\varphi n \longrightarrow \varphi$. Si nos acercamos a un punto de la línea internacional de cambio de fecha por el oeste tenemos $\varphi n \longrightarrow -\pi$, y por el este, $\varphi n \longrightarrow \pi$: la longitud salta al cruzar esta línea. Por eso, consideraremos únicamente puntos de longitud estrictamente entre $-\pi$ y π.

En la práctica se suele medir la longitud y la latitud en grados, minutos, y segundos. Por ejemplo, la ciudad de Honolulu tiene por latitud $\theta = 21°18{,}3'$ (es decir 21 grados y 18,3 minutos) y longitud $\varphi = 157°52{,}3'$.

Por lo tanto, que la latitud y longitud son medidas angulares, no nos sirven para medir distancias. Una unidad habitual para medir las distancias es la milla náutica (mn), que se define diciendo que un arco de 1' de un círculo máximo mide 1 mn. Como π radianes son 180°, tenemos $1' = \pi/(60 \cdot 180) \approx 2{,}9089 \cdot 10^{-4}$ radianes, y luego

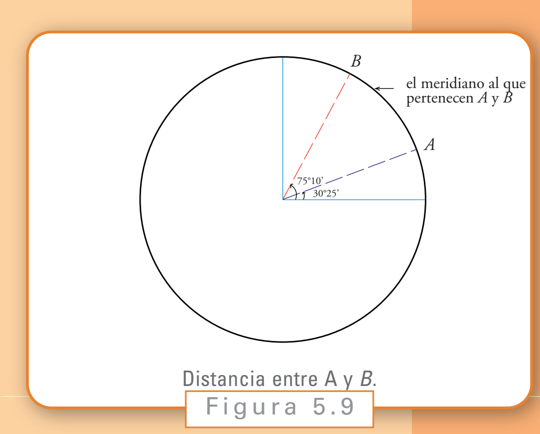
el valor de la milla náutica depende del lugar de la Tierra donde estemos (pues la Tierra no es perfectamente esférica). Su valor oficial es 1,852 *km*. Podríamos tomar 1,85 *km* como valor

$$1mn = 2{,}9089 \cdot 10^{-4} R = 2{,}9089 \cdot 10^{-4} \cdot 6.378$$
$$= 1{,}8553\ km \qquad (3.3)$$

en vista de la definición de distancia (2.1).

Supongamos que queremos medir la distancia entre dos puntos de misma longitud, digamos entre un punto A de coordenadas $(\theta_A, \varphi_A) = (30°25', 40°)$ y B de coordenadas $(\theta_B, \varphi_B) = (75°10, 40°)$. Estos dos puntos pertenecen al mismo meridiano. Luego, la distancia entre ellos vale

$$\theta_B - \theta_A = 44°45$$
$$= 44 \cdot 60' + 45'$$
$$= 2.685'$$
$$= 2.685\ mn$$
$$= 4.981{,}5\ km$$

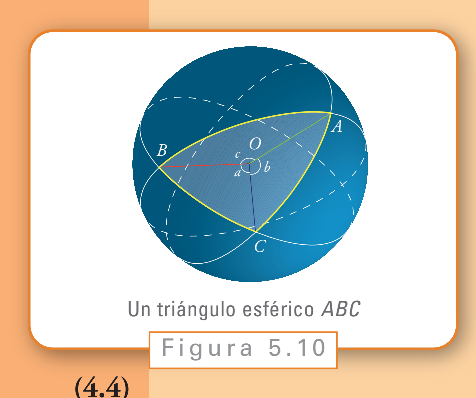


Distancia entre A y *B*.
Figura 5.9

Pudimos calcular la distancia entre A y B porque ambos puntos pertenecían al mismo meridiano. Podríamos calcular de la misma manera la distancia entre dos puntos del mismo paralelo, es decir, entre dos puntos de misma latitud. Pero por el momento, el problema de calcular la distancia entre dos puntos de coordenadas cualesquiera está fuera de nuestro alcance. Para resolverlo necesitaremos algunos conceptos de trigonometría esférica.

5.4. Triángulos y trigonometría sobre una esfera

5.4.1. Definición y primeras propiedades



Un triángulo esférico *ABC*

Figura 5.10

Definimos un triángulo esférico de vértices A, B, C de la misma manera que se define un triángulo ABC en el plano: consideramos tres puntos A, B, C distintos sobre una esfera (ver la figura 5.10) y dibujamos las rectas (AB), (AC) y (BC), esto es, los tres círculos máximos que pasan por cada par de vértices (están bien definidos y son distintos dos a dos si suponemos que no hay vértices antipodales y que A,B,C no pertenecen a la misma recta, lo que supondremos siempre). Obtenemos así ocho triángulos posibles. De estos ocho candidatos vamos a guardar únicamente el triángulo tal que los ángulos

(4.4) $$a := (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}), \quad b := (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}), \quad c := (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$$

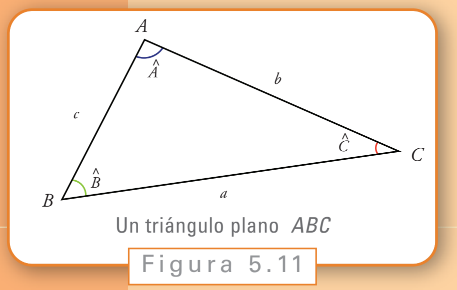
pertenecen a $(0, \pi)$. Un triángulo tal se llama a veces *pequeño triángulo*. Aunque las fórmulas de trigonometría que vamos a ver valen también por cada uno de los otros 7 triángulos posibles, consideraremos únicamente los pequeños triángulos.

Sabemos que en geometría plana existen relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo. Por ejemplo, en un triángulo cualquiera ABC del plano (ver figura 5.11), existe el llamado Teorema del Coseno,

(4.5) $$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc.\cos(\hat{A}),\\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac.\cos(\hat{B}),\\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab.\cos(\hat{C}), \end{aligned}$$

y

(4.6) $$\frac{a}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{b}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \frac{c}{\operatorname{sen}(\hat{C})}.$$



Un triángulo plano *ABC*

Figura 5.11

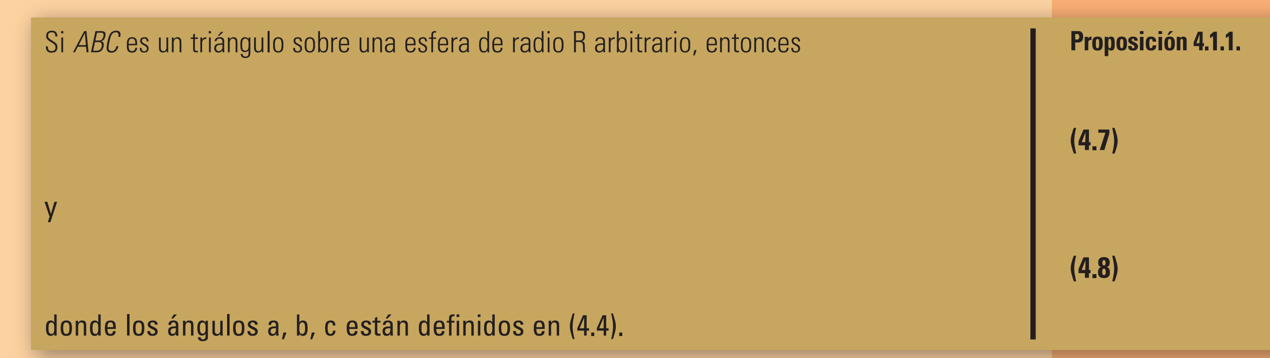
Queremos ver si existen fórmulas de este tipo para los triángulos esféricos. Ya sabemos como medir la distancia entre dos puntos y, por ende, los lados de un triángulo: si usamos nuestra definición de distancia (2.1) con las notaciones (4.4), obtenemos

$$AB = \textit{longitud del lado } AB = Rc,\ AC = Rb,\ BC = Ra,$$

donde R es el radio de la esfera.

Ahora, ¿cómo definimos los ángulos en los vértices de un triángulo, por ejemplo el ángulo $\hat{A}$ en el vértice A de un triángulo esférico ABC? Muy cerca de A, el círculo máximo que pasa por A y B es casi llano. La recta que aproxima, de la mejor manera posible, este círculo máximo en A es la recta tangente a este círculo en A (ver figura 5.12). Las rectas tangentes en A a los lados AB y AC son distintas y se cortan en A. Luego, definen un plano: el plano tangente a la esfera en A. Definimos ahora $\hat{A}$ como el ángulo entre estas dos rectas en este plano (ver figura 5.13). Definimos de la misma manera los ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ correspondientes a los vértices B y C del triángulo ABC.

Probaremos las siguientes relaciones, que son las relaciones análogas a (4.5) y (4.6) en geometría esférica. Se las suele llamar las *relaciones fundamentales de la geometría esférica*:



Proposición 4.1.1.

Si ABC es un triángulo sobre una esfera de radio R arbitrario, entonces

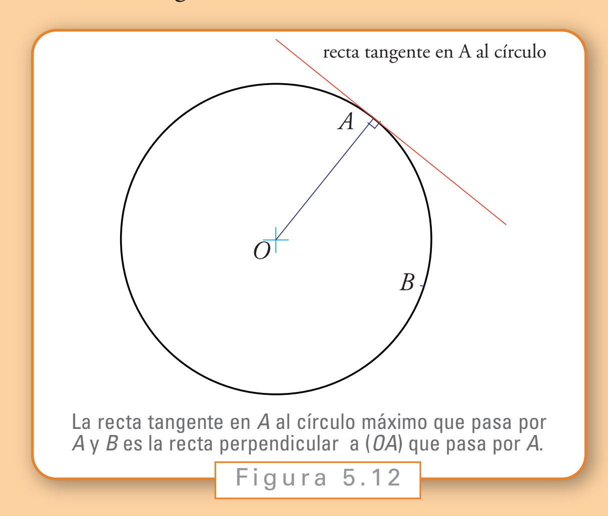
(4.7)

y

(4.8)

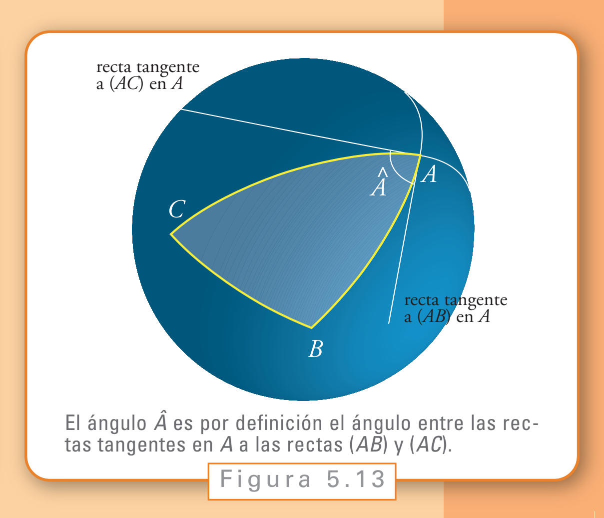
donde los ángulos a, b, c están definidos en (4.4).

Vamos a probar estas fórmulas de manera geométrica. La prueba es un poco larga pero sencilla. Luego veremos una demostración analítica.



La recta tangente en A al círculo máximo que pasa por A y B es la recta perpendicular a (OA) que pasa por A.

Figura 5.12



El ángulo $\hat{A}$ es por definición el ángulo entre las rectas tangentes en A a las rectas (AB) y (AC).

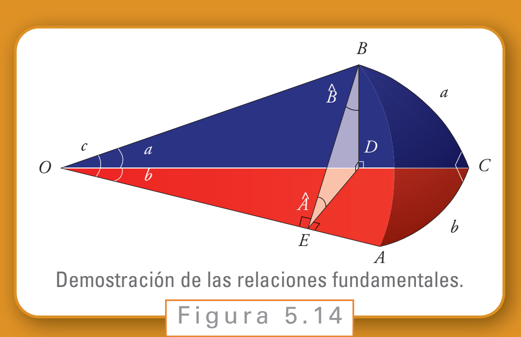
Figura 5.13

Demostración

Podemos suponer $R = 1$, pues una dilatación de centro O (el centro de la esfera) y factor $1/R$ transforma a la esfera de radio R en una de radio 1, y al triángulo original en uno nuevo con los mismos ángulos , , y a, b, c.

Supongamos primero que ABC tiene un ángulo recto en C y que los lados a y b miden menos de $\pi/2$. Consideremos el plano perpendicular a OA que pasa por B. Llamamos E y D los puntos de intersección de este plano con las rectas (OA) y OC respectivamente (ver figura 5.14). En el triángulo BDE rectángulo en D tenemos

En BDO rectángulo en D,



Demostración de las relaciones fundamentales.

Figura 5.14

En BOE rectángulo en E,

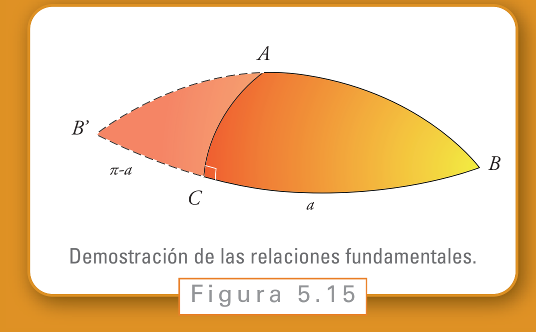
En DEO rectángulo en E,

Luego, como supusimos = y en particular cos( ) = 0, sen( ) = 1, tenemos

(4.9)

Introduciendo el plano ortogonal a (OB) que pasa por A, probamos de la misma manera que

Supongamos ahora que $a \geq \pi/2$, y consideremos el punto de intersección B' de las rectas (AB) y (CB) (ver figura 5.15), es decir B' es el punto antipodal de B. Como $d(B,B') = \pi$ (recordar que supusimos $R = 1$), tenemos $d(B$ $,C) < \pi/2$.



Demostración de las relaciones fundamentales.

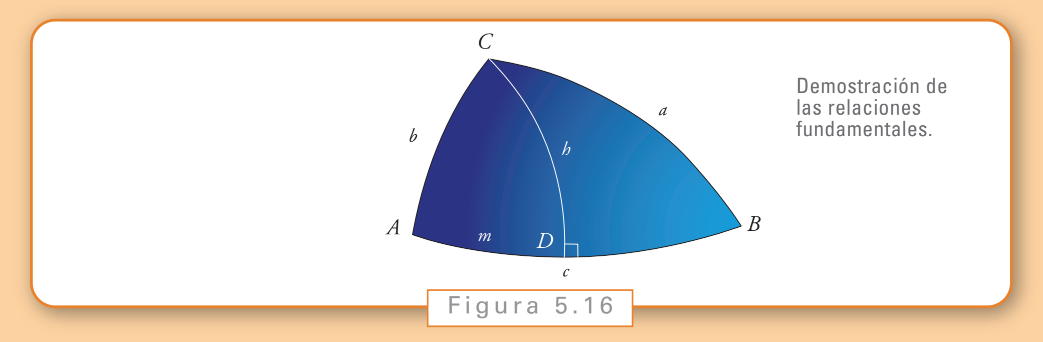
Figura 5.15

Aplicar (4.9) en *AB′C* y usar que sen($\pi - \theta$) = sen(θ) para todo θ para deducir que (4.9) vale también en *ABC* con $a \geq \pi/2$. | **Ejercicio 4**

Nos queda el caso a, b ≥ π/2:

Inspirarse en el ejercicio anterior para probar que (4.9) vale también en ABC con $a, b \geq \pi/2$. | **Ejercicio 5**

Necesitaremos la siguiente relación en la próxima y última etapa de la prueba:



Demostración de las relaciones fundamentales.

Figura 5.16

Probar que sen(b) = tg(a) cot($\hat{A}$). | **Ejercicio 6**

Supongamos ahora que *ABC* es un triángulo cualquiera e introduzcamos la recta ortogonal al lado *AB* que pasa por *C*. Esta recta corta *AB* en *D*. Llamamos *m* la distancia entre *A* y *D*, *h* la distancia entre *C* y *D*. En cada triángulo *ADC* y *CDB* rectángulo en *D* podemos aplicar el caso anterior. Por un lado en *ACD* y en *BCD* tenemos respectivamente

$$\frac{\operatorname{sen}(h)}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \operatorname{sen}(b), \quad y \quad \frac{\operatorname{sen}(h)}{\operatorname{sen}(\hat{B})} = \operatorname{sen}(a).$$

y por lo tanto

$$\frac{\operatorname{sen}(a)}{\operatorname{sen}(\hat{A})} = \frac{\operatorname{sen}(b)}{\operatorname{sen}(\hat{B})}.$$

Por otro lado en *BCD*,

$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(h)\cos(c-m) \\ &= \cos(h)\cos(m-c) \\ &= \cos(h)\cos(m)\cos(c) + \cos(h)\operatorname{sen}(m)\operatorname{sen}(c), \end{aligned}$$

y en *ACD*,

$$\begin{aligned} \cos(b) &= \cos(h)\cos(m), \\ \operatorname{sen}(m) &= \operatorname{tg}(h)\cot(\hat{A}) \text{ por el ejercicio 6} \end{aligned}$$

Entonces

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(c)\text{sen}(h)\cot(\hat{A}).$$

Como $\frac{\text{sen}(h)}{\text{sen}(\hat{A})} = \text{sen}(b)$ obtenemos finalmente

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \text{sen}(b)\cos(\hat{A})\text{sen}(c).$$

Veamos una prueba analítica de las primeras relaciones fundamentales. Para esto, se requieren nociones de métodos vectoriales, tales como la relación entre el producto interno de dos vectores y el ángulo que forman, que definiremos a continuación. Si bien puede evitarse su lectura, es un buen ejemplo de las ventajas de los métodos analíticos por su brevedad. En este caso, introduciremos los elementos imprescindibles para que se pueda seguir la demostración.

Dados los vectores $\overrightarrow{OA} = (a_1, b_1, c_1)$ y $\overrightarrow{OB} = (a_2, b_2, c_2)$ (donde (a_1, b_1, c_1) y (a_2, b_2, c_2) son las coordenadas de los puntos A y B), definimos su producto interno como

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 + c_1 \cdot c_2.$$

El coseno del ángulo α entre ambos es

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{\sqrt{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}}\sqrt{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OB}}}.$$

Obsérvese que si dos vectores son ortogonales, como $cos(\pi/2) = 0$, el producto interno entre ellos es nulo. Además, $\sqrt{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OA}} = OA$ es la longitud del vector $\overrightarrow{OA}$.

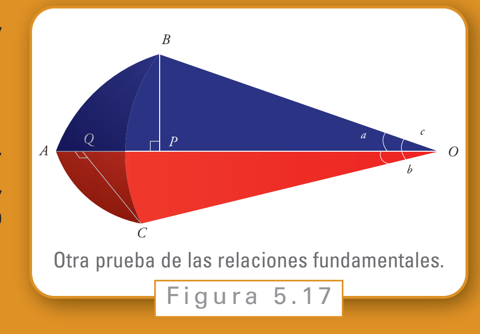
Demostración

Consideremos la figura 5.17. La idea de la prueba consiste en calcular de dos maneras distintas el producto interno . .

Por un lado, por definición del producto interno,

(4.10)

porque los puntos B y C pertenecen a la esfera de radio R centrado en O. Por otro lado, introduciendo los puntos P, Q en el segmento (OA) tales que sean perpendiculares



Otra prueba de las relaciones fundamentales.

Figura 5.17

lo que implica, en particular, que , tenemos

Demostración

El ángulo (,) es exactamente $\hat{A}$ porque la recta (*PB*) (resp. (*QC*)) es paralela a la tangente al lado *AB* (resp. *AC*) en *A* y ambas pertenecen al plano *BOA* (resp. *COA*). Además cos(,) = cos(0) = 1. Luego

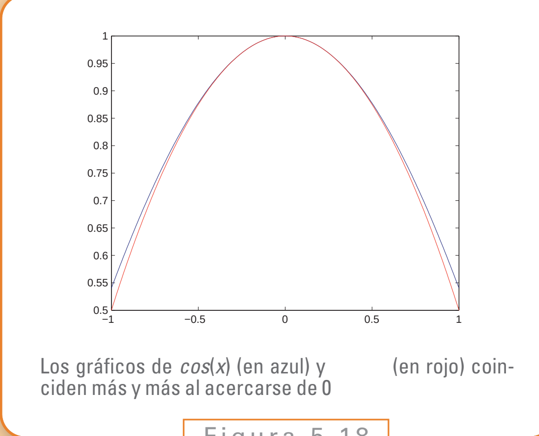
En el triángulo *POB* rectángulo en *P* con = *c*, se tiene que *OP* = *OB*. *cos*(*c*) = *Rcos*(*c*) y *PB* = *Rsen*(*c*). De la misma manera, obtenemos considerando el triángulo *OQC* que *OQ* = *Rcos*(*b*) y *QC* = *Rsen*(*c*). Luego

Igualando con (4.10) y dividiendo por R^2, obtenemos la primera relación en (4.7). Las demás, se demuestran de la misma manera.

Intuitivamente, podemos decir que una porción pequeña de una esfera es muy parecida a un plano. Luego, podemos preguntarnos si las relaciones fundamentales de la geometría esférica no darían alguna relación de la geometría plana, cuando se considera triángulos de lados muy chiquitos. Entonces, supongamos que *a, b, c* son muy pequeños. Debemos saber cómo se comportan cos(*x*) y *sen*(*x*) por *x* chico. Vimos que

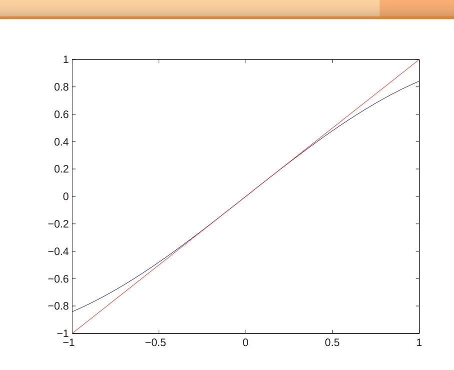
$$\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} \text{ y } \operatorname{sen}(x) \approx x \qquad \textbf{(4.11)}$$

cuando |*x*| es chico. Se puede comprobar gráficamente en las figuras 5.18 y 5.19.



Los gráficos de *cos*(*x*) (en azul) y (en rojo) coinciden más y más al acercarse de 0

Figura 5.18



Los gráficos de sen(x) (en azul) y x (en rojo) coinciden más y más al acercarse de 0.

Figura 5.19

Ejercicio 7 **Usar las aproximaciones (4.11) para mostrar que se puede considerar las relaciones fundamentales de la geometría plana (4.5) como un caso límite de las relaciones fundamentales de la geometría esférica cuando se toma triángulos esféricos de lados muy chicos.**

Una consecuencia de las relaciones fundamentales es la validez de la desigualdad triangular para la distancia definida por (2.1):

Proposición 4.1.6 Para todo triángulo *ABC*

Demostración Como $a, b, c \in (0, \pi)$, tenemos $\operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c) \neq 0$, podemos reescribir la primera relación fundamental como

Como $-1 < \cos(\hat{A}) < 1$ (pues $\hat{A} \in (0, \pi)$), obtenemos

$$\cos(b)\cos(c) - \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c) < \cos(a) < \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)$$

es decir,

$$\cos(b + c) < \cos(a) < \cos(b - c).$$

Si $b+c \in (0, \pi)$ la primera desigualdad da $a < b+c$ (pues el coseno es decreciente en $(0, \pi)$). Como $a < \pi$, vale también $a < b + c$, si $b + c \in (\pi, 2\pi)$. Por otro lado, si $b + c \in (\pi, 2\pi)$, la primera desigualdad implica que $a < 2\pi - (b + c)$, esto es, $a + b + c < 2\pi$.

Si $b + c \in (0, \pi)$ esta desigualdad vale trivialmente, pues $a \in (0, \pi)$. Finalmente, la segunda desigualdad da $a > |b - c|$.

Ahora, podemos usar las relaciones fundamentales para calcular la distancia entre dos puntos de la Tierra. Por ejemplo, si queremos calcular la distancia entre Honolulu (lat: 21°18,3', long: 157°52,3') y San Francisco (lat: 37°47,5', long: 122°25,7'), consideraremos el triángulo cuyos vértices son el Polo Norte y estas dos ciudades (ver figura 5.20). Tenemos

$$\begin{aligned} a &= 90^\circ - 37^\circ 47{,}5' \\ &= 52^\circ 12{,}5' \\ &= 0{,}9112\ rad \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= 90^\circ - 21^\circ 18{,}3' \\ &= 68^\circ 41{,}7 \\ &= 1,199\ rad \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{C} &= 157^\circ 52{,}3' - 122^\circ 25{,}7' \\ &= 35^\circ 26{,}6' \\ &= 0{,}6186\ rad. \end{aligned}$$

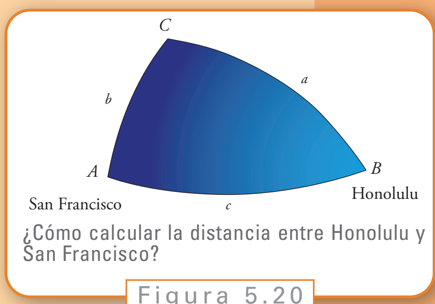
Luego

$$\begin{aligned}\cos(c) &= \cos(a)\cos(b) + \text{sen}(a)\text{sen}(b)\cos(\hat{C}) \\ &= 0{,}8225\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} c &= \arccos(0{,}8225) = 0{,}6051\ rad \\ &= 34{,}6689^\circ \text{ pues } \pi\ rad = 180^\circ \\ &= 34^\circ 40{,}134' \text{ pues } 1^\circ = 60' \\ &= 2.080{,}1' = 2080{,}1\ mn \text{ por definición de milla náutica} \\ &= 3.859{,}2\ km \text{ por (3.3).}\end{aligned}$$

Entonces, la distancia entre Honolulu y San Francisco es de 2.080,1 mn = 3.859,2 km.

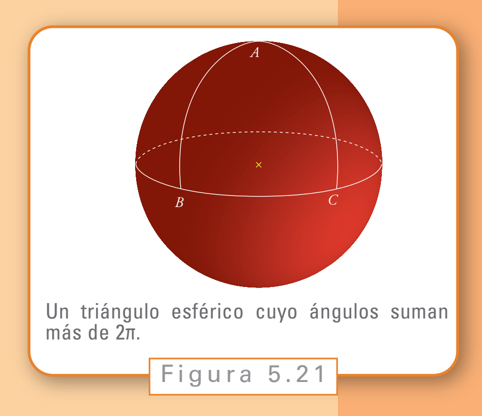


¿Cómo calcular la distancia entre Honolulu y San Francisco?

Figura 5.20

5.4.2. Área de un triángulo esférico y suma de sus ángulos

Sabemos que la suma de los ángulos de un triángulo plano vale π cualquiera sea el triángulo, y que su área está determinada por sus ángulos y uno de sus lados, es decir, dilatando un triángulo dado en el plano, podemos obtener triángulos con los mismos ángulos que el triángulo de inicio, pero con cualquier área. La situación es completamente distinta en el caso de los triángulos esféricos. Podemos ver, por ejemplo, en la figura 5.21, un triángulo cuyos ángulos $\hat{B}$ y $\hat{C}$ son rectos cualquiera sea $\hat{A}$. Luego, la suma de sus ángulos es mayor que 2π y no es un número fijo (basta variar $\hat{A}$). Veremos que, en general, la suma de los ángulos de un triángulo esférico es un número entre π y 3π y que su área[2] depende únicamente de esta suma.



Un triángulo esférico cuyo ángulos suman más de 2π.

Figura 5.21

El resultado, conocido como teorema de Girard sobre el área de un triángulo esférico, es el siguiente:

Teorema

El área del triángulo esférico ABC sobre una esfera de radio R vale

(4.13)

[2] Ubicando un punto de una esfera usando su latitud y longitud, es decir usando sus coordenadas esféricas (ver figura 5.8), podemos definir el área de una parte A de la esfera por

(4.12)

Por ejemplo, el área del cuarto de esfera $A = \{(\theta, \varphi), 0 \le \theta \le \pi/2, 0 \le \varphi \le \pi\}$, vale

Ejercicio 8 **¿En qué medida podemos ver el resultado, según el cual la suma de los ángulos de un triángulo plano vale 2π como un caso límite de esta fórmula?**

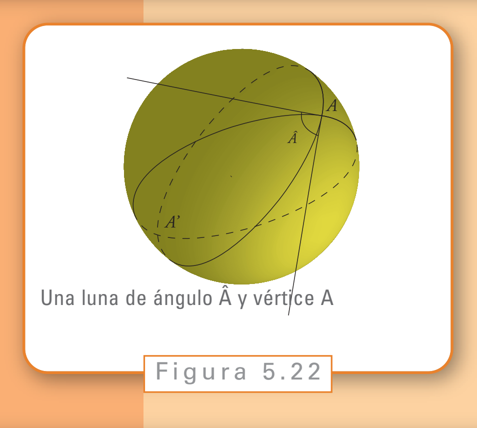
La fórmula (4.13) puede generalizarse a polígonos esféricos de n lados exactamente como en el plano.

Ejercicio 9 **Consideremos un polígono esférico P_n con $n \geq 3$ lados sobre una esfera de radio R. Suponemos P_n convexo (es decir el segmento que une dos puntos del interior de P_n está totalmente incluido en el interior de P_n). Probar que**

$$\text{área}(P_n) = (\hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n - (n-2)\pi)R^2$$

donde $A_1, \ldots, A_n$ son los vértices de P_n.

Sugerencia: hacer como en la demostración del primer capítulo.



Una luna de ángulo Â y vértice A

Figura 5.22

Veamos una demostración geométrica del Teorema de Girard basada en calcular el área de partes de la esfera llamadas lunas. Una luna es una de las cuatro partes de la esfera delimitadas por dos círculos máximos (ver figura 5.22). Por ejemplo, la esfera es la luna de ángulo 2π, una media-esfera es una luna de ángulo π.

Llamamos $\mathcal{A}(\alpha)$ al área de una luna de ángulo $\alpha \in [0, 2\pi]$.

Proposición 4.2.3 *Se tiene*

$$\mathcal{A}(\alpha) = 2\alpha R^2.$$

Demostración La propiedad fundamental del área es: el área de una unión de dos conjuntos cuya intersección es vacía (es decir que no se encuentran, no tienen ningún elemento en común) es la suma de las áreas de cada uno. Luego,

$$\mathcal{A}(\alpha_1 + \alpha_2) = \mathcal{A}(\alpha_1) + \mathcal{A}(\alpha_2).$$

Dividimos la esfera en $p \in \mathbb{N}$ lunas, cada una de ángulo y, por lo tanto, de igual área (ver figura 5.23).

Como el área de una esfera de radio R vale $4\pi R^2$, obtenemos

i.e.

Demostración

Dado $q \in \mathbb{N}$, $q \leq p$, obtenemos de ahí que



Dividimos la esfera en lunas de igual ángulo y con los mismos vértices, por ejemplo, los polos norte y sur. Miramos la esfera desde uno de estos vértices.

Figura 5.23

Como p y q pueden ser cualquier par de números enteros, hemos demostrado la fórmula para todo α racional. Como $\mathcal{A}$ es continua, esto es, si (α_n) es una sucesión que se aproxima a α, entonces $\mathcal{A}(\alpha_n) \to \mathcal{A}(\alpha)$. Ahora, obtenemos la fórmula para todo α real, aproximando un número irracional por una sucesión de números racionales.

Ejercicio 10

Mostrar la fórmula del área de una luna usando (4.12).

Sugerencia: Describir la luna en coordenadas esféricas:
luna = $\{(\theta, \varphi), \theta_0 \leq \theta \leq \theta_1, \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1\}$
con $\theta_0, \theta_1, \varphi_0, \varphi_1$ a determinar.

Podemos probar ahora la fórmula de Girard sobre el área de un triángulo esférico:



Demostración del teorema 1

Sea T un triángulo esférico de vértices A, B, C. Llamamos L_A, L_B, L_C a las lunas de vértice A, B, C respectivamente (y vértices opuestos A', B', C' respectivamente) que contienen T (ver figura 5.24).

La unión de estas tres lunas es la unión del triángulo $A'B'C'$ con la semiesfera determinada por el círculo máximo que pasa por A y B que contiene a T. Podemos notar, que haciendo la unión de L_A y L_B, tomamos dos veces T.

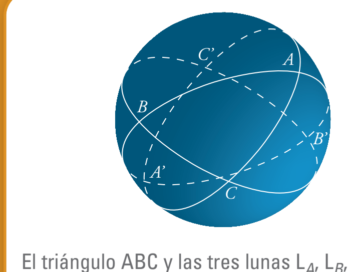
Los triángulos ABC y $A'B'C'$ son imagen uno del otro por la simetría de centro O, el centro de la esfera, pues los tres círculos máximos son globalmente invariantes por esta simetría, y luego la imagen de A (resp. B, C) es A' (resp. B', C') y la imagen del lado AB (resp. AC, BC) es el lado $A'B'$ (resp. $A'C'$, $B'C'$). En particular, los triángulos ABC y $A'B'C'$ tienen igual área. Entonces

$$\text{área}(L_A \cup L_B \cup L_C) = \text{área}(\text{media esfera}) + \text{área}(T) + \text{área}(T')$$
$$= \text{área}(\text{media esfera}) + 2.\text{área}(T)$$

Como una esfera de radio R tiene área $4\pi R^2$, y

$$\text{área}(L_A \cup L_B \cup L_C) = \text{área}(L_A) + \text{área}(L_B) + \text{área}(L_C)$$
$$= 2(\quad + \quad + \quad)R^2,$$

obtenemos el resultado.



El triángulo ABC y las tres lunas L_A, L_B, L_C

Figura 5.24

Si reescribimos la fórmula de Girard como

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \frac{\acute{a}rea(ABC)}{R^2} + \pi$$

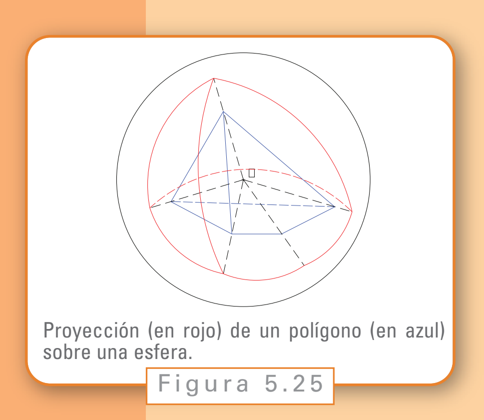
y observamos que el área del triángulo pequeño ABC, que puede ser incluido en una hemisferio por ser pequeño, es por un lado, un número positivo y por otro lado, inferior al área de una semiesfera que es $2\pi R^2$, obtenemos

Corolario 4.2.5 | *La suma de los ángulos de un triángulo esférico pequeño es un número entre π y 3π.*

5.4.3. Aplicación de la fórmula de Euler para los polígonos

Vamos a usar el teorema de Girard para probar la conocida fórmula de L.Euler, que veremos en más detalle en el capítulo 7 sobre los polígonos (ver el capítulo 7 para otra demostración). Consideremos un polígono cualquiera, y llamemos F, E, V a la cantidad de caras, aristas y vértices, respectivamente. La fórmula es la siguiente:

(4.14) $$V - E + F = 2.$$



Proyección (en rojo) de un polígono (en azul) sobre una esfera.

Figura 5.25

Por ejemplo, un cubo tiene $F = 6$ caras, $E = 12$ aristas y $V = 8$ vértices. Luego $V - E + F = 6 - 12 + 8$
$= 2.$

Para probar esta fórmula, consideremos un punto O adentro del polígono $\mathcal{P}$, y una esfera centrada en O de radio R bastante grande para que contenga $\mathcal{P}$. Ahora, proyectamos $\mathcal{P}$ sobre la esfera de la siguiente manera: a cada punto P de $\mathcal{P}$ le asociamos el punto de intersección de la esfera con la semirecta $[OP]$ (ver figura 5.25).

Ejercicio 11 | **Probar que una arista de $\mathcal{P}$ se transforma en una porción de círculo máximo, y también que cada cara se transforma en un polígono esférico.**

Las caras de $\mathcal{P}$ se transforman en F polígonos esféricos $P_1, \ldots P_F$. Aplicamos la fórmula de Girard en cada uno (recuerde el ejercicio 4.2.2):

$$\text{suma de los ángulos de } P_i = \frac{\text{área de } P_i}{R^2} + \pi(\text{cantidad de lados de } P_i - 2)$$

Ahora sumamos sobre los F polígonos P_i:

$$\text{suma de los ángulos de los } P_i = \frac{\text{suma de las areas de los } P_i}{R^2} + \pi \sum_{i=1}^{F} (\text{cantidad de lados de los } P_i - 2F).$$

Examinemos cada término:

- si sumamos los ángulos de los P_i, no según los polígonos sino según los vértices, vemos que en cada vértice sumamos todos los ángulos que salen de este vértice. Como esta suma vale 2π, el miembro de izquierda vale $2\pi V$;
- los P_i cubren totalmente la esfera. Luego, la suma de sus áreas es igual al área de la esfera que vale $4\pi R^2$. El primer término del miembro de la derecha vale 4π;
- cada lado de cualquiera de los polígonos P_i, que corresponde a una de las E aristas de $\mathcal{P}$, pertenece a dos polígonos esféricos, entonces está contado dos veces en la suma: $\sum_{i=1}^{F}$(cantidad de lados de los P_i = $2E$).

Obtenemos entonces

$$2\pi V = 4\pi + \pi(2E - 2F)$$

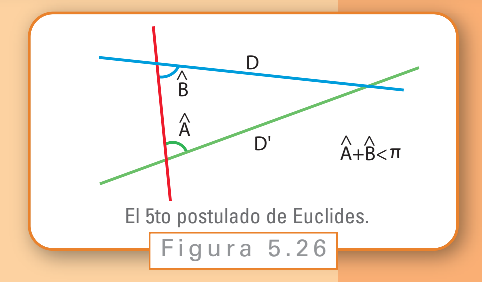
que es exactamente la fórmula (4.14).

5.5. Paralelismo sobre la esfera

El famoso quinto postulado de Euclides afirma que:

Si dos líneas cruzan una tercera de tal manera que la suma de los ángulos interiores en un lado es menor de dos ángulos rectos, entonces las dos líneas deben cruzarse una a la otra de ese lado, prolongadas lo suficiente. **E1**

Sean las rectas D y D' y la transversal las corta formando los ángulos $\hat{A}$ y $\hat{B}$ con $\hat{A} + \hat{B} < \pi$ (ver figura 5.26), entonces D y D' se cortan.



El 5to postulado de Euclides.
Figura 5.26

Un enunciado equivalente, hallado por el matemático J. Playfair en el siglo XIX, es el siguiente:

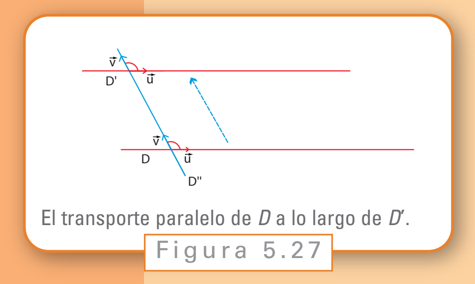
Por un punto pasa una única recta paralela a una recta dada, que no contiene a este punto. **E2**

Muchos intentaron, sin éxito, deducir este postulado de los demás axiomas de Euclides. Hasta que en el siglo XIX, algunos matemáticos como Gauss, Lobatchevski, Bolyai se preguntaron qué pasaría si este postulado fuese falso sin tocar los demás axiomas de Euclides. Lejos de encontrar una contradicción, que hubiera surgido si este quinto postulado fuese consecuencia de los demás axiomas como se suponía hasta entonces, desarrollaron otras geometrías, las llamadas geometrías no-euclidianas, entre ellas la geometría esférica, la hiperbólica y, más generalmente, las geometrías riemanianas (que se usan, por ejemplo, en la famosa teoría de la relatividad general de Einstein).

Vamos a estudiar los dos enunciados E1 y E2 en el marco de la geometría esférica. Una primera observación es que E1 vale siempre sobre una esfera, porque dos rectas de la esfera se cortan siempre (en exactamente dos puntos antipodales). Ahora, para estudiar E2 debemos aclarar primero la noción de paralelismo sobre la esfera, esto es, definir cuándo dos rectas (o sea, dos círculos máximos) son paralelas. De la misma manera que al principio de este capítulo, primero vamos a examinar con cuidado esta noción en el plano, para después intentar definirla sobre la esfera.

5.5.1. Transporte paralelo en el plano

Generalmente, se dice que dos rectas en el plano son paralelas si nunca se cortan o, de manera equivalente, si la distancia entre ambas se mantiene constante. El problema es que no podemos usar ninguna de estas dos propiedades para definir el paralelismo sobre una esfera, porque allí dos rectas cualesquiera se cortan siempre y la distancia entre ellas no es constante.



El transporte paralelo de *D* a lo largo de *D'*.

Figura 5.27

Una tercera definición que va a resultar más conveniente es la siguiente: dos rectas *D* y *D'* en el plano son paralelas si forman el mismo ángulo con respecto a una tercera recta *D*" que corta ambas (ver la figura 5.27). Luego, para dibujar una paralela a *D* debemos mover, deslizar *D* a lo largo de *D*" de manera que el ángulo entre *D y D*", o mejor dicho entre dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dirigiendo *D* y *D*" respectivamente, se mantenga constante a lo largo del desplazamiento. Deslizar $\vec{u}$ a lo largo de *D*" de esta manera, se llama hacer el transporte paralelo de $\vec{u}$ a lo largo de *D*". También decimos que *D*' es el transporte paralelo de *D* a lo largo de *D*" y viceversa.

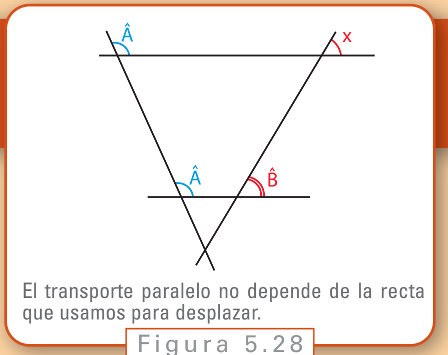
Una propiedad importante del transporte paralelo en el plano es que no depende de la recta *D*" que usamos para desplazar *D*:

Ejercicio 12 | **En la figura 5.28 probar que el ángulo x es igual a .**

Para resolver este ejercicio tuvimos que usar que la suma de los ángulos de un triángulo plano vale siempre π. La recíproca vale también.

Si en la situación de la figura 5.28, el ángulo x es igual a , entonces la suma de los ángulos de cualquier triángulo plano vale π.

Ejercicio 13



El transporte paralelo no depende de la recta que usamos para desplazar.

Figura 5.28

Finalmente, podemos decir que dos rectas en el plano son paralelas, si una es el transporte paralelo de la otra a lo largo de una (y entonces cualquiera) tercera recta que las corta.

5.5.2. Transporte paralelo sobre la esfera

La idea del transporte paralelo de un vector a lo largo de una recta en el plano puede usarse para definir el transporte paralelo de un vector tangente a la esfera a lo largo de una recta de la esfera: deslizamos un vector tangente $\vec{u}$ a lo largo de una recta de la esfera de manera que el angulo entre $\vec{u}$ y el vector tangente $\vec{v}$ a la recta (su vector velocidad) se mantenga constante. Si utilizamos conocimientos de derivadas, otra forma de decirlo, es que lo desplazamos de manera que la derivada de $\vec{u}$ en la direccion de $\vec{v}$ sea nula a lo largo del desplazamiento (ver figura 5.29)."

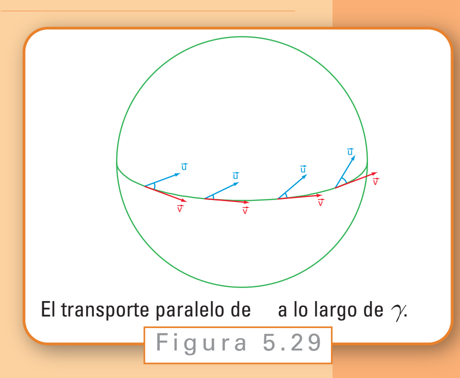
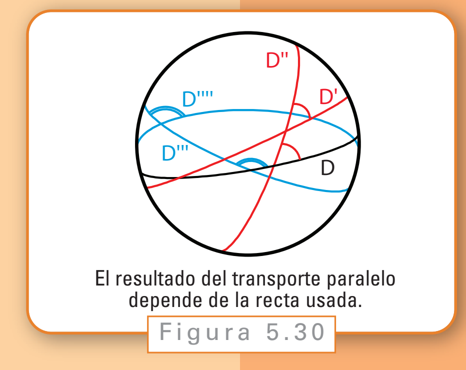

El transporte paralelo de a lo largo de γ.

Figura 5.29

Entonces, podemos hacer el transporte paralelo de una recta de la esfera a lo largo de otra aplicando esta idea. Vimos recién que la noción de transporte paralelo en el plano llevaba a la noción de paralelismo, porque el resultado del transporte paralelo no dependía de la recta que usábamos para deslizar y que eso se debía a que la suma de los ángulos de un triángulo cualquiera del plano vale π. Ahora sabemos, por el teorema de Girard, que la suma de los ángulos de un triángulo esférico no es constante. Luego, podemos sospechar que el transporte paralelo sobre la esfera va depender de la recta usada para deslizar, lo que podemos comprobar en la figura 5.30 donde *D’* (resp. *D””*) es el transporte paralelo de *D* a lo largo de *D”* (resp. *D’”*). Más precisamente se puede mostrar que dos rectas *D* y *D’* son paralelas a lo largo de *D”* si y solamente si *D”* es la única recta que corta ortogonalmente *D* y *D’* (es decir *D”* es el eje de simetría de la luna definida por *D* y *D’*).



El resultado del transporte paralelo depende de la recta usada.

Figura 5.30

En conclusión, no podemos decir que dos rectas de la esfera son paralelas, sino únicamente que una es el transporte paralelo de la otra a lo largo de tal recta.

Ahora, podemos discutir la validez del enunciado E2. Por lo que vimos, no podemos definir la noción de paralelismo sobre la esfera, sino únicamente la de transporte paralelo. Por lo tanto, E2 stricto sensu es falso. Pero si reescribimos E2 como

E2′ *Por un punto pasa una recta que es el transporte paralelo de una recta dada que no contiene al punto.*

Obtenemos, en vista del último ejercicio, que existe un número infinito de rectas que pasan por el punto y que son el transporte paralelo de la recta dada, pues por el punto pasa un número infinito de rectas y cada una es el transporte paralelo de la recta dada según una cierta otra recta.

En conclusión, el quinto postulado de Euclides, E1 o E2, puede ser verdadero o falso según si consideramos la versión E1 o E2, que son equivalentes en el plano pero no sobre la esfera, y lo que entendemos por "paralelismo".

En la siguiente sección introducimos la noción de holonomía, que muestra que la imposibilidad de definir el paralelismo se debe a la "curvatura" de la esfera.

5.5.3. Holonomía

Consideremos un triángulo *ABC* en el plano y un vector con base en *A*. Si hacemos el transporte paralelo de este vector sucesivamente a lo largo de [*AB*], [*BC*] y [*BA*] (ver figura 5.31), observamos que el vector obtenido después de estos tres transportes paralelos sucesivos coincide con el vector original. Luego el ángulo entre ambos vectores, que se llama holonomía H(*ABC*) de *ABC*, es nulo.

Ahora, hacemos lo mismo con un triángulo esférico *ABC* (ver figura 5.32). Esta vez el vector obtenido después de los tres transportes paralelos hace un ángulo non nulo H(*ABC*) con el vector original. Pero ocurre que H(*ABC*) no depende del vector que desplazamos, sino únicamente de los ángulos del triángulo:

Ejercicio 14 **Escribiendo que $H = \pi - u'' + \hat{A} - u$, y encontrando una relación entre u y u' por un lado y u' y u'' por otro lado, probar que**

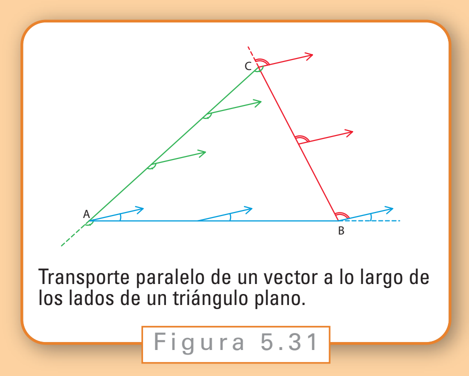
Decimos que H(*ABC*) es la holonomía del triángulo ABC.

Usando la fórmula de Girard podemos expresar la holonomía de ABC en función de su área y del radio R de la esfera:

(5.15)
$$H(ABC) = \frac{área(ABC)}{R^2}$$

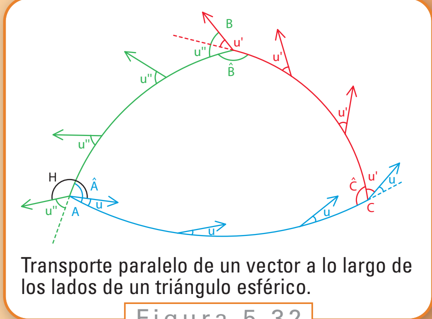
Por otro lado, vimos que la holonomía de un triángulo en el plano es nula. Como el miembro derecho de (5.15) se achica más y más a medida que *R* crece, es decir, como la holonomía de un triángulo esférico se acerca más y más a la holonomía de un trián-

gulo plano cuando R crece, obtenemos de nuevo el plano como caso límite de una esfera de radio "infinito". Entonces $1/R^2$ mide cuán lejos está un esfera del plano. Decimos que $1/R^2$ es la curvatura de Gauss de una esfera de radio R, y "0" la curvatura del plano.



Transporte paralelo de un vector a lo largo de los lados de un triángulo plano.

Figura 5.31



Transporte paralelo de un vector a lo largo de los lados de un triángulo esférico.

Figura 5.32

Una consecuencia del "teorema egregium" de Gauss dice que: si existiera una función entre la esfera y el plano que guardara las distancias (es decir la distancia entre dos puntos de la esfera es igual a la distancia, en el plano, de los puntos del plano que les corresponden por esta función), entonces la esfera y el plano deberían tener la misma curvatura de Gauss, lo que es falso. Luego, no existe tal aplicación. En particular, no existen mapas de la Tierra, una esfera, sin distorsión.

5.6. Mapas de la Tierra o cómo volver llana una esfera

El problema que queremos abordar en esta última parte es representar la Tierra con mapas. El problema que surge es que, como vimos recién, un mapa perfecto sin distorsión no existe. Un mapa que preserve las distancias no existe porque la Tierra es curva y el mapa es llano. Luego, lo mejor que se puede hacer es diseñar mapas preservando algunas propiedades con la medida de los ángulos, un tal mapa se califica de *conforme*, o que preserve las áreas, o que no deforme demasiado algunas zonas.

Matemáticamente, un mapa o proyección es una aplicación P de la esfera de radio R en el plano $\mathbb{R}^2$, que a un punto de coordenadas esféricas (θ, φ) le asocia un punto (x, y) de $\mathbb{R}^2$ donde x, y son funciones de θ y φ: $x = x(\theta, \varphi)$, $y = y(\theta, \varphi)$. El siguiente teorema, que no vamos a probar, da una condición necesaria y suficiente para que P conserve el área por un lado y los ángulos por otro lado, e involucra las derivadas de la transformación:

Consideremos

Teorema 2

Teorema 2

(6.16)

1. *La proyección P conserva las áreas, si y solamente si*

   para todo $(\theta,\varphi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$.

2. *La proyección P conserva los ángulos, si y solamente si* $C = 0$, *y existe una función* $D(\theta,\varphi) > 0$ *continua tal que*

(6.17)
$$A = R^2 D,\ B = R^2 \cos^2(\theta) D$$

   para todo $(\theta,\varphi) \in (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi)$.

El criterio (6.16) es una simple consecuencia del teorema de cambio de variable por funciones de varias variables.

Vamos a examinar ahora tres proyecciones distintas: la proyección estereográfica, la cilíndrica y la de Mercator.

5.6.1. Proyección estereográfica

Dado un punto M de la esfera distinto del Polo Norte N, consideramos la recta que pasa por N y M. Esta recta corta el plano ecuatorial xy en un punto M' (ver figura 5.33). La aplicación $M \in S \to M' \in \mathbb{R}^2$ se llama proyección estereográfica.

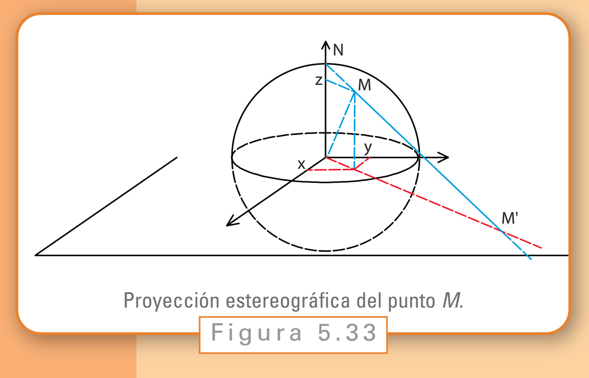
Ejercicio 15

Si M tiene por coordenadas esféricas (θ, φ), mostrar que las coordenadas de M' en $\mathbb{R}^2$ son

(¿Por qué $1 - \text{sen}(\theta) \neq 0$?)

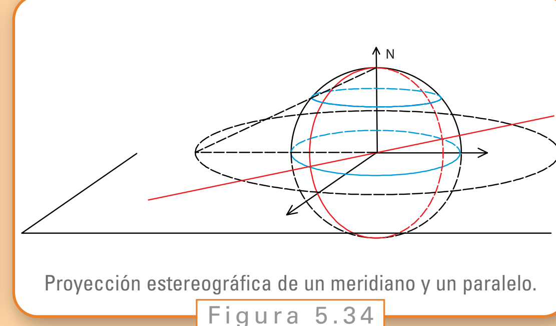
Ejercicio 16

¿Cuál es la imagen de un meridiano? ¿Y de un paralelo? (ver figura 5.34)



Proyección estereográfica del punto *M*.

Figura 5.33



Proyección estereográfica de un meridiano y un paralelo.

Figura 5.34

Vamos a ver que la proyección estereográfica conserva los ángulos. Ya lo podemos comprobar con los meridianos y paralelos, pues un paralelo cualquiera y un meridiano cualquiera son ortogonales y sus imágenes respectivas son un círculo y una recta que es su diámetro, y por lo tanto, se cortan también ortogonalmente. Para probar que esta proyección conserva los ángulos en general, basta verificar que (6.17) se cumple. Tenemos

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = \frac{R}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\cos(\varphi), \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\frac{R\cos(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\operatorname{sen}(\varphi)$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{R}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\operatorname{sen}(\varphi), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{R\cos(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\cos(\varphi)$$

Luego, usando $\cos^2(\theta) + \operatorname{sen}^2(\theta) = 1$ por todo θ, obtenemos

$$A = \left(\frac{R}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2, \quad B = \left(\frac{R\cos(\theta)}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2, \quad C = 0.$$

Entonces, obtenemos (6.17) con $D = \left(\frac{R}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\right)^2$.

En cambio, la proyección estereográfica no conserva el área, pues (6.16) no se cumple para todo θ, φ:

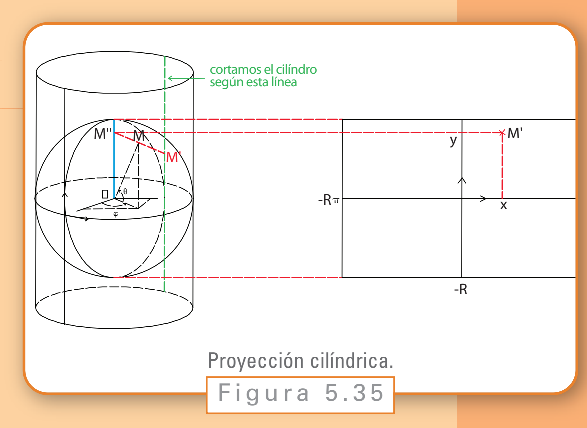
$$AB - C^2 = \left(\frac{R}{1-\operatorname{sen}(\theta)}\right)^4 \cos^2(\theta) \neq R^4\cos^2(\theta) \quad si \quad \theta \neq 0.$$

Pero si $\theta \approx 0$, es decir cerca del Ecuador, entonces $\operatorname{sen}(\theta) \approx 0$, luego $AB - C^2$ es casi $\cos^2(\theta)$. Por lo tanto, esta proyección es bastante fiel a la realidad cerca del Ecuador.

Si en lugar de proyectar sobre el plano ecuatorial, proyectamos sobre el plano paralelo al plano ecuatorial que pasa por el polo sur obtenemos una buena carta de la Antártida. Si nos interesa otra región de la Tierra, giramos la esfera hasta que coincidan esta región con el polo sur $(0, 0, -1)$ y luego proyectamos.

5.6.2. Proyección cilíndrica

La proyección cilíndrica consiste en llevar de alguna manera una esfera sobre un cilindro. Consideremos un cilindro tangente a la esfera (ver figura 5.35). Llamamos M'' la proyección de M sobre el eje de simetría del cilindro, y luego llamamos M' el punto de intersección de $[M'',M)$ con el cilindro (ver figura 5.35). Así, obtenemos así una aplicación $M \rightarrow M'$ de la esfera en el cilindro. Finalmente, cortamos el cilindro según



Proyección cilíndrica.

Figura 5.35

la recta $\varphi = \pi$ y lo aplanamos. La proyección cilíndrica es la aplicación $P_C\colon M \longrightarrow M'$, con el punto M' en el plano. Si tomamos coordenadas x, y en el plano cuyo centro corresponde al punto ($\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$) de la esfera,

Ejercicio 17 | **Probar que la aplicación $P_C : M = (\theta, \varphi) \to M' = (x, y)$ viene dada por**

Esta proyección tiene la ventaja de conservar las áreas. Para probarlo, basta verificar que (6.16) se cumple. Se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = R,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = R\cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0.$$

Luego,

$$A = R^2 \cos^2(\theta), \quad B = R^2, \quad C = 0.$$

y (6.16) sigue.

5.6.3. Proyección de Mercator

Ahora, queremos modificar la proyección cilíndrica para obtener una proyección que conserve los ángulos. Seguimos tomando $x(\theta, \varphi) = R\varphi$ y buscamos y tal que:

1. y sea una función de θ ; es decir $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0$,
2. $y(\theta) > 0$ si $\theta > 0$ y $y(0) = 0$, y
3. se cumpla (6.17).

Como

$$A = y'(\theta)^2, \quad B = R^2, \quad C = 0,$$

obtenemos que (6.17) se cumple si y solamente si existe una función $D(\theta, \varphi)$ tal que:

$$\begin{aligned} A &= y'(\theta)^2 \\ &= R^2 D, \\ B &= R^2 \\ &= R^2 \cos^2(\theta)\ D. \end{aligned}$$

De la segunda ecuación sacamos $D(\theta, \varphi) = 1/\cos(\theta)^2$. Obtenemos de la primera que

$$y'(\theta) = \frac{R}{\cos(\theta)} \quad con \quad y(0) = 0.$$

Se puede resolver esta ecuación. Obtenemos

$$y(\theta) = R \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right).$$

Definimos entonces la proyección de Mercator (de Gerardus Mercator que la halló en 1569) como

$$(\theta, \varphi) \to \left(R\varphi, R \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)\right).$$

¿Cuál es la imagen de un meridiano $\{\varphi = \varphi_0\}$? ¿Y de un paralelo $\{\Theta = \Theta_0\}$? | **Ejercicio 18**

Se puede ver el gráfico de $y(\theta)$ y la función identidad en la figura 5.36. Observe como $y(\theta)$ se parece más y más a la identidad al acercarse de $\theta = 0$ y como en cambio toma valores más y más grandes al acercarse de $\pm\frac{\pi}{2} \approx \pm 1{,}57$: podemos pensar que la proyección de Mercates será bastante fiel a la realidad cerca del Ecuador pero la distorsionará mucho cerca de los polos. Veámoslo teóricamente: la proyección de Mercator conserva los ángulos por construcción pero no las áreas pues

$$\sqrt{AB} = \frac{R^2}{\cos(\theta)} \neq R^2 \cos(\theta)$$

y luego la condición (6.16) no se cumple. Pero cuando $\theta \approx 0$, es decir cerca del Ecuador, (6.16) se cumple aproximadamente pues $\cos(\theta) \approx 1$. Entonces cerca del Ecuador la proyección de Mercator conserva los ángulos y también las áreas de manera aproximada: es una mapa bastante buena cerca del Ecuador. El ejercicio siguiente da una propiedad útil para la navegación de esta proyección:

Supongamos que estamos a bordo de un bote cuyo recorrido hace un ángulo constante con los meridianos. ¿Cuál es el recorrido sobre una mapa de la Tierra obtenido con la proyección de Mercator? Sugerencia: esta proyección conserva los ángulos. | **Ejercicio 19**

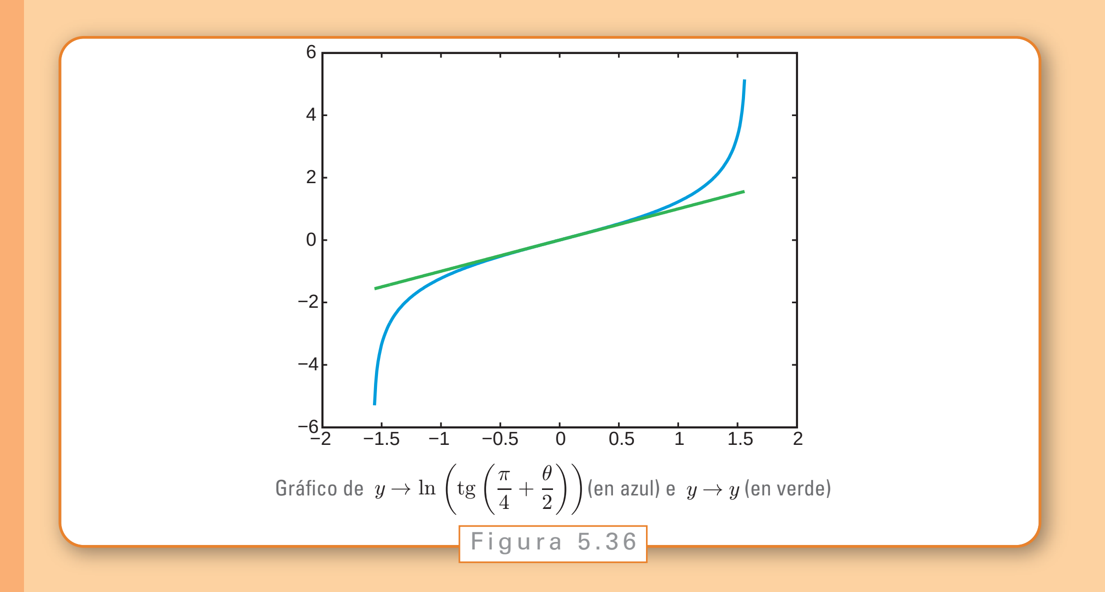


Gráfico de $y \to \ln\left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$ (en azul) e $y \to y$ (en verde)

Figura 5.36

Mapamundi de Mercator, 1569

Figura 5.37

Capítulo 6

Geometría proyectiva

Inés Saltiva

6.1. Introducción

Observemos las dos mesas de la Figura 6.1

Y veamos la figura 6.2 ¿Qué ocurre si se la mira desde el borde derecho de la página?

Dentro de estos ejemplos hay mucha geometría escondida y, para encontrarla, tenemos que remontarnos al siglo XV, a la época del Renacimiento y, en lugar de buscar entre los matemáticos de esa época, hacerlo entre los pintores. Esto no suena tan raro, dado que los ejemplos se tratan de dibujos y de su interpretación.

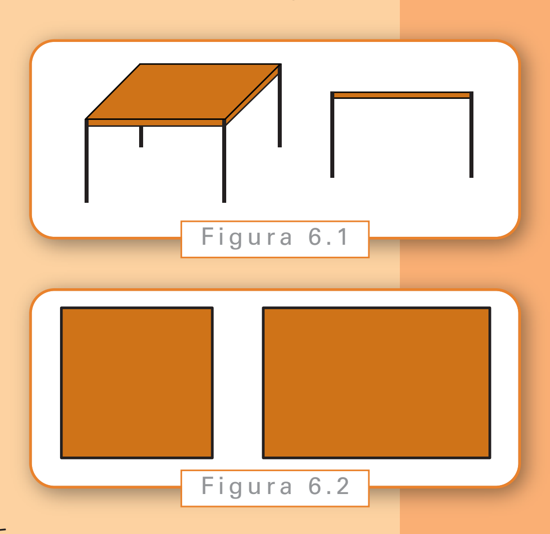


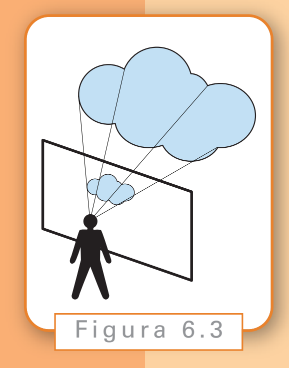
Figura 6.1

Figura 6.2

Uno de los cambios que se produce en la pintura del Renacimento es el estudio de la perspectiva, y uno de sus precursores fue Giotto di Bondone. Él marcó un nuevo rumbo en la búsqueda de realismo y sensación de profundidad. Lo siguió Filippo Brunelleschi, que logró encontrar leyes geométricas para la perspectiva. No escribió ningún tratado sobre el tema, sino que mostró su sistema en la práctica. Pintó dos paneles que representaban dos plazas de Florencia usando su técnica. Para aumentar la sensación de realismo, pintó el cielo de uno de sus paneles con plata, de manera que el cielo real se reflejara, y entonces se podía ver cómo las nubes corrían empujadas por el viento sobre la perfecta composición de edificios pintados.

Hubo varios artistas impresionados por las obras de Brunelleschi. Los primeros en trabajar usando perspectivas geométricas fueron Masaccio, Fra Angélico y Paolo Ucello. Sin embargo, sería León Battista Alberti quien por primera vez dejaría por escrito esas reglas. Nacido en 1404 en Roma, fue arquitecto, matemático, poeta, filósofo, músico y arqueólogo. Entre otras obras, publicó “De Pictura” en 1436, donde escribió la primera definición científica de perspectiva, que puede analizarse de la siguiente manera.

Supongamos que miramos una nube a través de una ventana. El ojo recibe los rayos luminosos que salen de cada punto del objeto, y con estos rayos forma la imagen que recibe el cerebro. Ahora, para cada uno de esos rayos marquemos el lugar donde cruza la ventana;


Figura 6.3

cuando la nube se haya ido, todavía podremos "verla" en la ventana (ver la figura 6.3) . Es muy importante no cambiar de posición durante todo el proceso.

A los rayos que usamos para dibujar en el vidrio se los llama *proyección,* y al conjunto de los puntos que quedaron marcados en la ventana, y que forman el dibujo de la nube, se lo llama *sección*.

El problema era, en ese entonces, cómo se debía pintar un objeto para que pareciera estar "más allá" de la tela. Piero della Francesca, Andrea Mantegna y más tarde Alberto Durero se suman a la búsqueda de esa técnica. Pero, para esa época, el estudio de las proporciones ya no estaba restringido sólo a los pintores y artistas. En 1509 Luca Pacioli publica "De Divina Proportione", un libro con ilustraciones de Leonardo da Vinci que trata sobre la proporción áurea y la perspectiva, entre otros temas geométricos. Gracias a esta obra, Durero se interesa por la matemática en relación con el arte, con lo que empieza un estudio de la misma que no abandonó en su vida y que marcó una profunda influencia en sus obras.

La evolución de la perspectiva en la pintura se puede observar a partir de los cuadros de distintos artistas renacentistas. Hemos elegido algunas que muestran esta evolución, en los cuales se observa gradualmente cómo mejora la técnica para dotar de profundidad a la pintura, y cómo varían las proporciones a la distancia. Primero, en *La última cena* (1302/05) de Giotto di Bondone, se observa una noción de perspectiva muy básica, y alejada de la que asociamos al cuadro de igual nombre de Da Vinci, pintada casi doscientos años después. Por otra parte, en *El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres*, de 1437, se observan ya nociones más precisas, si bien no siempre se mantienen paralelas líneas que deberían serlo. En *El Tributo* de Masaccio (iniciado por Massolino en 1424, terminado en 1480 por Lippi) se observa claramente el uso de la perspectiva para resaltar la figura central de Cristo, quien está dibujado de la misma altura que los Apóstoles, y convergen a él las líneas de los escalones, el dintel de la puerta, el frente del edificio (antes se acostumbra representarlo más alto, para indicar su importancia). Por último, en *El tránsito de la Virgen* (1462) de Andrea Mantegna se observan ya las reglas de la perpectiva de Alberti excelentemente combinadas, por ejemplo: la línea del horizonte bien definida, un

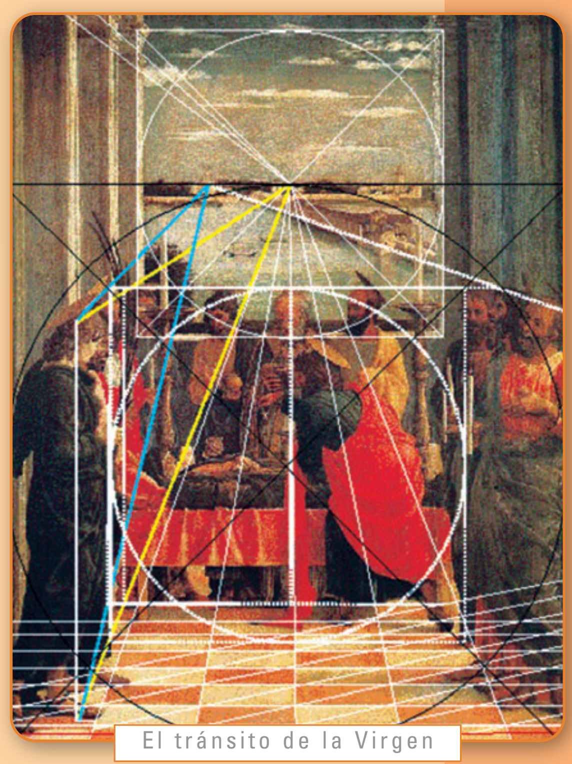

La última cena


El Nacimiento de San Nicolás, su vocación y la distribución de limosna a los pobres



El tributo

punto de fuga que da una perspectiva central, un segundo falso punto de fuga en la iglesia que se ve en el horizonte, el embaldosado del piso integrado a esta perspectiva.



El tránsito de la Virgen

6.1.1. ¿Cómo hacer para pintar en perspectiva?

En el caso más sencillo, cuando se busca el efecto de una vista de frente, los artistas utilizan lo que se llama "punto de fuga". Un ejemplo típico, es el dibujo de las vías del tren cuando el observador se sitúa en ellas. Las vías parecen unirse a lo lejos aunque en la realidad sean paralelas. Vamos a dibujar una caja sobre el suelo para ver cómo se hace.

El primer paso (figura 6.4) es decidir dónde está el horizonte y cuál será el punto de fuga.

En el segundo paso, vamos a marcar las esquinas del frente de la caja y marcar suavemente las rectas que unen cada una de estas esquinas con el punto de fuga (figura 6.5)

Ahora, sobre estas rectas tenemos que marcar las esquinas visibles de la parte trasera de la caja (figura 6.6)

Ahora, completamos las líneas horizontales y verticales que podemos ver de la caja (figura 6.7)

Y, como último paso, hacemos las líneas laterales siguiendo las rectas del punto de fuga (figura 6.8).

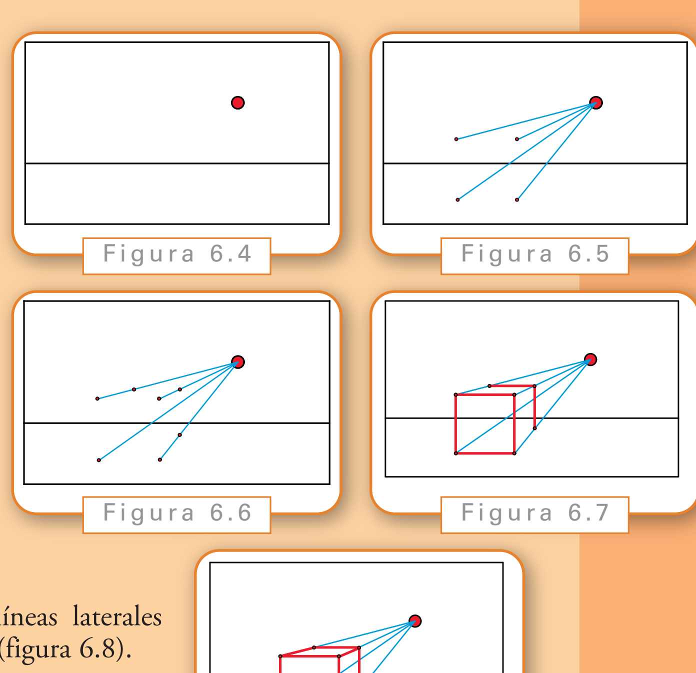


Figura 6.4

Figura 6.5

Figura 6.6

Figura 6.7

Figura 6.8

Esta técnica permite conseguir cualquier tipo de vista: frontal, desde arriba o abajo, desde la derecha o la izquierda. El efecto cambiará según cómo elijamos el punto de fuga.

Con este procedimiento se logra traer el infinito hacia un punto en la tela, con lo que, por comparación, se puede dar una sensación de distancia y profundidad.

Conviene hacer distintas vistas, cambiando el punto de vista, para entender cómo funciona el efecto.

6.1.2. Secciones cónicas

Como vimos, es relativamente sencillo dibujar en perspectiva objetos con bordes rectos, ya que basta con encontrar los vértices y completar con líneas rectas. El caso de objetos con bordes curvos como, por ejemplo, una rueda es más difícil. Una figura tan sencilla como un círculo no se verá, dibujado en perspectiva, como otro círculo.

Consideremos el siguiente ejemplo: iluminamos con una linterna una hoja de papel. Si la linterna se encuentra perpendicular a la hoja, el cono de luz tiene forma circular; pero si inclinamos la linterna, el círculo se empieza a deformar y toma varias formas distintas (ver figura 6.9).

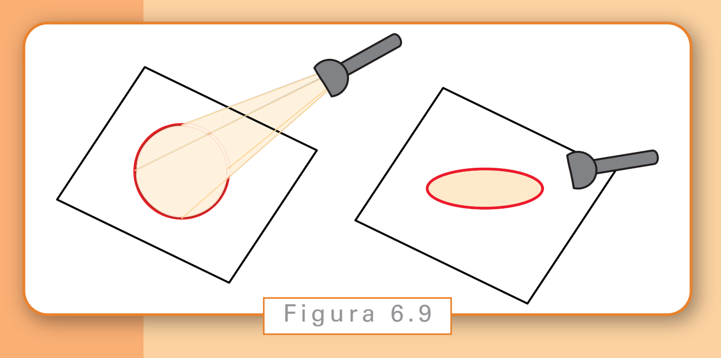


Figura 6.9

Se puede pensar estas figuras como la intersección de un cono y un plano: el cono es el haz de luz de la linterna y el plano es la hoja de papel. Estas intersecciones se llaman *secciones cónicas*: elipse (incluye a la circunferencia), parábola e hipérbola.

Las secciones cónicas, o más brevemente las cónicas, pueden definirse de distintas maneras. Analíticamente, son las curvas definidas por una ecuación del tipo:

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

donde a, b, c, f, g, y h son números fijos.

Ejemplo: una circunferencia de radio R está dada por la ecuación

$$x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Las cónicas se pueden definir según ciertas propiedades de tipo métrico.

Podemos definir la circunferencia como el conjunto de puntos que equidistan de un punto que llamamos su centro.

Para el caso de la elipse, existen dos puntos llamados *focos* con la siguiente propiedad: desde cualquier punto de la elipse, si trazamos dos segmentos conectándolos con los focos, como se muestra en la figura 6.10, la suma de las longitudes de estos segmentos no varía. En particular, en la circunferencia estos dos puntos se confunden en el centro de la misma.

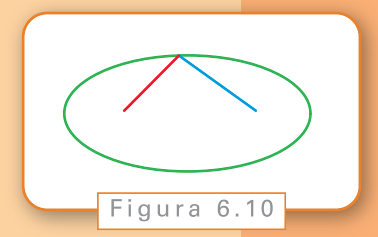


Figura 6.10

Observación. **Esta definición nos da un método para dibujar elipses, que Descartes llamaba (¡en 1637!) el método de los jardineros. Se clavan dos estacas en la tierra en los puntos elegidos como foco de la elipse, y se ata un hilo a ambos. Luego, se estira el hilo con una rama y la hace girar manteniendo tenso el hilo. La figura que queda marcada es una elipse.**

Definimos una elipse de dos formas diferentes (si cortamos el cono con un plano, o vía las distancias a los focos), veamos que efectivamente si cortamos un cono con un plano inclinado adecuadamente obtenemos una elipse.

Esta demostración fue dada por Germinal Dandelin, y utiliza las llamadas esferas de Dandelin. Estas esferas son tangentes al mismo tiempo al cono y al plano; una por arriba y otra por debajo. Esto significa que cada esfera toca al cono en una circunferencia, y al plano en un punto.

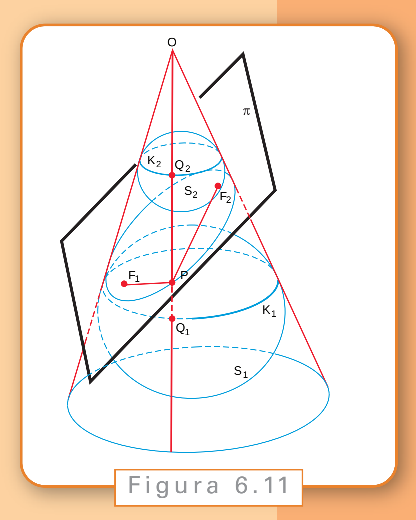


Figura 6.11

Llamemos S_1 a la esfera inferior, K_1 a la circunferencia que comparte con el cono y F_1 al punto donde toca al plano. Y de la misma manera, sean S_2 la esfera superior, K_2 la respectiva circunferencia de tangencia y F_2 la intersección con el plano.

Probemos que F_1 y F_2 cumplen la propiedad que se pide a los focos de una elipse. Para eso elijamos un punto P cualquiera que pertenezca a la intersección del plan con el cono. Tenemos que mostrar que la distancia

$$D = F_1P + PF_2$$

no depende del punto P elegido, o sea que es constante.

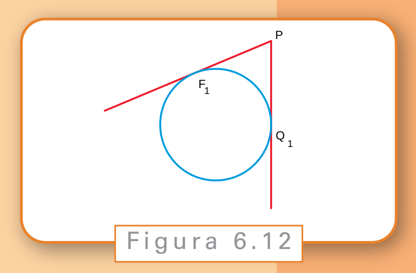


Figura 6.12

Tracemos una recta que una a P con el vértice del cono O, y llamemos Q_1 al punto donde esta recta cruza a la circunferencia K_1 y Q_2 al punto donde cruza a la circunferencia K_2.

Consideremos los segmentos PF_1 y PQ_1, que pertenecen a rectas tangentes a S_1 y que pasan ambas por P. Por la simetría radial de la esfera, tenemos que ambos segmentos deben medir lo mismo.

Trabajando de la misma manera con la esfera superior, tenemos que las distancias PF_2 y PQ_2 son iguales.

Entonces tenemos

$$PF_1 = PQ_1 \qquad\qquad PF_2 = PQ_2$$

Si sumamos ambas ecuaciones nos queda

$$PF_1 + PF_2 = PQ_1 + PQ_2$$

O sea

$$\begin{aligned} D &= PQ_1 + PQ_2 \\ &= Q_1Q_2 \end{aligned}$$

Como las circunferencias de tangencia son perpendiculares a la recta que une al vértice con P para cualquier punto P, tenemos que Q_1Q_2 sólo depende de la inclinación del plano, como queríamos ver.

Ejercicio 1 | **Analizar las propiedades geométricas que definen a la parábola y a la hipérbola. Hallar las ecuaciones de las cónicas en coordenadas polares y cartesianas.**

6.1.3. Anamorfosis



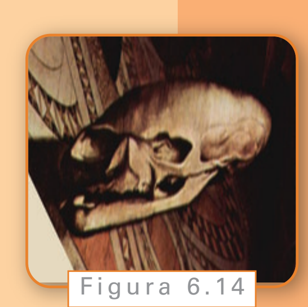
Figura 6.13

Hemos empezado a descubrir cuál es la geometría oculta detrás de nuestro primer dibujo pero, ¿qué pasa con los rectángulos de la figura 6.2? ¿Cómo se deforman?

Si miramos detenidamente el cuadro *Los embajadores* de Hans Holbein (figura 6.13.), ¿Qué es lo que se ve a los pies de los embajadores? ¿Y si se mira desde la parte inferior derecha de la hoja? Se ve la calavera de la figura 6.14

En este famoso cuadro Holbein usa la técnica de la *anamorfosis*. La anamorfosis es un tipo de representación de un objeto. En esta representación la perspectiva está deformada de modo tal

que obliga al espectador a colocarse en un punto especial y único (que no es el usual frente a la pintura) para verlo bien. El rectángulo a la derecha en la Figura 6.2 es una representación anamórfica de un cuadrado.


Figura 6.14

De esta forma, la geometría puede enseñarnos cómo "deformar" los objetos, o ayudarnos a saber si existe algún punto desde el cual mirar una pintura para encontrar figuras "ocultas".

¿Cómo hacer un dibujo anamórfico? Se traza una cuadrícula sobre el dibujo que se quiere convertir en imagen anamórfica, numerando cada uno de los cuadrados y señalando la diagonal del cuadrado que conforma el contorno externo de la cuadrícula (ver figura 6.15).

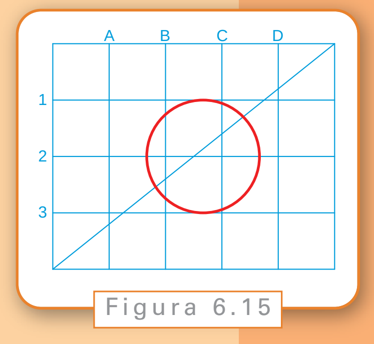


Figura 6.15

A continuación, se procede a distorsionar la red de la forma siguiente: se traza un lado del mismo tamaño y número de divisiones que el de la imagen original. Se elige un punto *X* a considerable distancia de dicho lado y se unen las divisiones con el punto *X*, como en la figura 6.16.

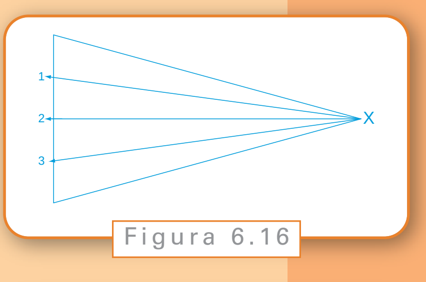


Figura 6.16

Desde el punto *X* se traza una recta vertical ligeramente menor a la altura de la cuadrícula original y se une su punto extremo, que denominaremos como *Y*, con el punto inferior izquierdo de la nueva cuadrícula, ver figura 6.17.

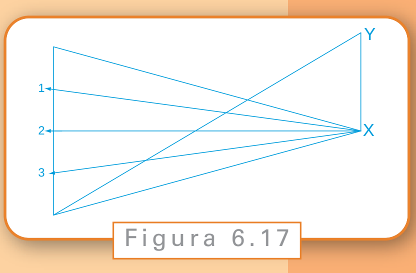


Figura 6.17

Esta última línea cortará las líneas que concurren en *X* en varios puntos. A partir de los puntos así obtenidos, se trazarán unas rectas verticales, paralelas entre sí, que formarán la cuadrícula distorsionada, como en la figura 6.18.

A continuación, se irá dibujando la imagen, trasladando todos los puntos básicos a sus lugares correspondientes en la nueva red distorsionada (figura 6.19). Para poder ver el dibujo sin distorsiones, tal y como es en la realidad, se debe colocar el papel en forma casi perpendicular a la cara y mirar la imagen desde la derecha.

Cuanto más lejos se halle del punto *X*, mayor será la distorsión de la imagen, que aparecerá estrecha y aplastada.

Esta es una forma muy elemental de generar una imagen anamórfica, en la actualidad cualquier reproductor digital de películas, o programas de procesa-

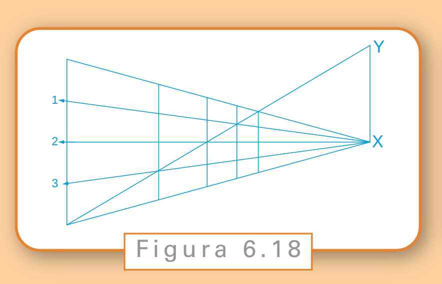


Figura 6.18

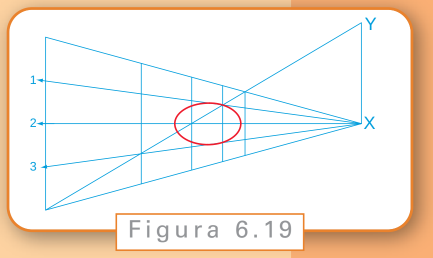


Figura 6.19

miento de imágenes, pueden cambiar las proporciones de la imagen según los formatos habituales. También se puede lograr esta clase de efectos mediante lentes especiales, como en el viejo “Cinemascope”.

En la actualidad, existen diversos usos de los dibujos anamórficos. En algunas canchas de fútbol o rugby se pueden ver imágenes publicitarias pintadas sobre el césped con la particularidad de que si son tomadas por determinadas cámaras parecen realmente carteles verticales; y pueden provocar alguna sorpresa cuando un jugador les camina por encima y parece flotar sobre un cartel.

También es muy útil la deformación anamórfica en la señalización vial. Si nos detenemos a mirar las señales que se encuentran pintadas en el pavimento vemos que se encuentran muy alargadas, y son incómodas para que un peatón las interprete. Esto se debe a que no están hechas para los peatones sino para los automovilistas, que tienen un punto de observación más bajo (figura 6.20).



Figura 6.20

6.2. Teorema de Desargues

Una vez que se desarrollaron las técnicas de perspectiva, su estudio quedó completo para los pintores del Renacimiento y por mucho tiempo también para los geómetras, hasta la llegada de Gérard Desargues (1591-1661) un arquitecto e ingeniero militar francés que encontró un nuevo camino a seguir.

Esto no quiere decir que la geometría no hubiera avanzado, sino que no había avanzado respecto del estudio de la perspectiva. En paralelo, con Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) se desarrolló la geometría analítica; lamentablemente no tenemos posibilidad de profundizar en ella en este trabajo.

En general, la geometría analiza las propiedades de las figuras en el plano o en el espacio, pero no todas las propiedades de una figura tienen que referirse a las mismas “características” de la figura; podemos querer saber propiedades *cuantitativas* (por ejemplo, el tamaño de un triángulo, su área, la longitud de los lados, la medida de sus ángulos) o propiedades *cualitativas* (la forma que tiene: si es rectángulo, por ejemplo, o si todos sus ángulos son menores a un recto).

La pregunta natural es entonces: ¿cuáles son las propiedades que están relacionadas con la perspectiva, es decir, con la proyección? La Geometría Proyectiva se encarga de estudiar estas propiedades, y Desargues se considera su fundador dado que escribió el primer tratado sobre el tema, en 1639, en el cual se encuentra uno de los primeros teoremas proyectivos:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos ABC y A'B'C' en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A', B y B', C yC') se cruzan en un punto O, entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

La figura 6.21 nos puede ayudar a comprender el enunciado del teorema.

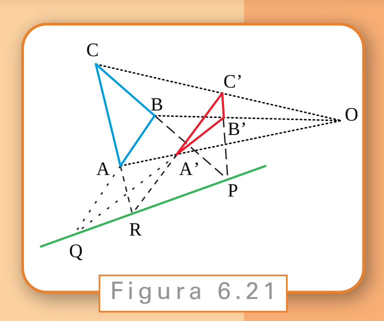


Figura 6.21

¿Qué es lo que hace a este teorema diferente a los que se prueban en la geometría euclidiana clásica? Lo principal es que su enunciado se puede considerar como una descripción de una situación tridimensional: los triángulos pueden estar en dos planos diferentes, y la figura 6.21 es una representación de cómo los ve un observador desde el punto O (en lugar de un cono, podemos pensar en una pirámide). Gracias a esto resulta un caso fácil de demostrar.

Cambiemos la perspectiva desde la que vemos la figura 6.21. En la figura 6.22 tenemos dos planos, el triángulo ABC en uno de ellos, $\pi_{1,}$ y A'B'C' en el otro, π_2. Los dos planos se cortan en una recta (si fuesen paralelos, los pares de lados no se intersecarían). Veamos ahora la demostración.

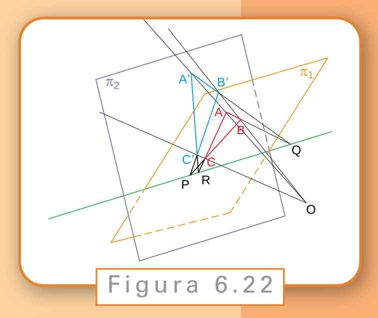


Figura 6.22

Demostración

Supongamos que las rectas AA', BB' y CC' se cruzan en O entonces las rectas AB y A'B' están en un mismo plano (una cara de la pirámide) y por hipótesis se intersecan en un punto que llamaremos Q. De la misma manera AC y A'C' se intersecan en R, y BC y B'C' lo hacen en P.

Como AB, BC, CA están en π_1 entonces los puntos P, Q, y R están en π_1; además, como A'B', B'C', C'A' están en $\pi_{2,}$ entonces P, Q, y R, están también en π_2. O sea que P, Q y R están a la vez en π_1 y $\pi_{2,}$ entonces están en la intersección de ambos planos, que es una recta.

En definitiva, para demostrar el teorema en el plano hay que "salir" a tres dimensiones y mirar el dibujo original en el plano como una proyección. Pero para esto

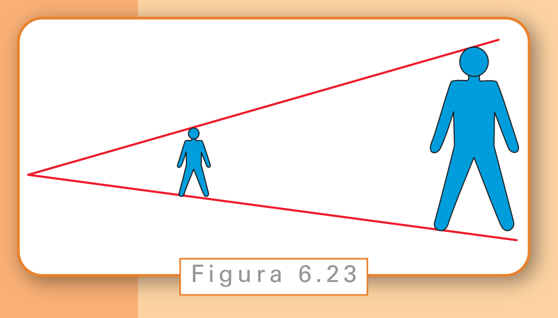


Figura 6.23

es necesario definir qué significaba una proyección en términos un poco más formales, y es lo que haremos en la próxima sección.

Antes de hacerlo, démosle una última mirada a nuestro teorema, desde otro punto de vista. Supongamos que los triángulos estuvieran pintados sobre papeles lo suficientemente grandes para que no viéramos los bordes y los fuéramos viendo uno por uno desde el punto O. ¿Podríamos distinguir cuál de los triángulos estamos viendo? No, para nuestros ojos son todos iguales ya que lo que el ojo mide es el ángulo entre los vértices y no el tamaño lineal (ver la figura 6.23).

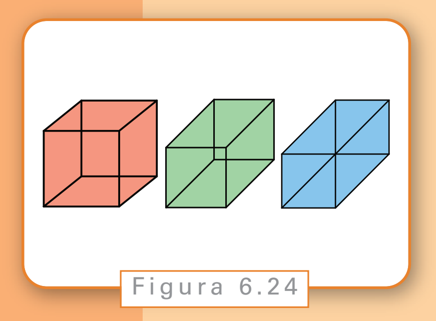


Figura 6.24

Para convencernos, hagamos el siguiente test: en la figura 6.24, ¿observa un hexágono o un cubo?

Lo que ocurre en este caso es que nuestro cerebro tiende a considerar a las figuras simétricas como bidimensionales, por lo que pierden su sentido de perspectiva. Así es como se logra el efecto de profundidad, los objetos no salen del plano pero nuestro cerebro lo interpreta de esta manera gracias a experiencias previas, a tonos de luz, comparaciones, agrupaciones y otras "herramientas" de la percepción.

Por ejemplo, cuando la Luna recién aparece sobre el horizonte nos parece que es más grande que cuando se encuentra en lo alto del cielo, pero en realidad el ángulo visual no varía. Ante un mismo estímulo el cerebro responde de dos maneras diferentes.

6.3. La geometría proyectiva

6.3.1. Proyecciones

Supongamos que tenemos dos planos π y π' en el espacio. Entonces podemos hacer una proyección central de π en π' desde un centro O dado.

Definición: (proyección central) Dado un par planos de π en π' y un punto O fuera de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P' en π', que está en la misma recta que pasa por P y por O.

Es decir, conectamos los puntos P y O con un segmento, y buscamos su intersección con el plano π'. También se puede hacer una proyección paralela, donde las rectas de proyección son todas paralelas.

Dado un par planos de π en π′ y una recta dada que los interseque pero no pertenezca a ninguno de ellos, la imagen de cada punto P de π es el punto P′ en π′ que está en la paralela a la recta dada que pasa por P.

Definición: (proyección paralela)

Ambas proyecciones se muestran en la figura 6.25.

Algunas propiedades básicas que surgen de estas definiciones son las siguientes:

- Un punto se proyecta en un punto.
- Una recta se proyecta en una recta.
- Si un punto está en una recta, la proyección del punto estará en la proyección de la recta y si una recta pasa por un punto la proyección de la recta pasará por la proyección del punto.
- Si tres puntos están en una misma recta, sus proyecciones estarán en una misma recta.
- Si tres rectas pasan por un mismo punto, sus proyecciones pasarán por un mismo punto.

Es importante notar que en la demostración del teorema de Desargues en el espacio se utilizó que la proyección era central, y que los pares de lados correspondientes no eran paralelos (así las prolongaciones se intersecaban). Para eliminar estas hipótesis deberíamos hacer una demostración nueva.

Este tipo de situaciones se repiten constantemente cuando se trata de teoremas de la Geometría Proyectiva, que suelen no involucrar longitudes pero sí intersecciones. El gran aporte de Desargues fue encontrar la manera de que todos esos casos especiales cayeran dentro de un único caso general. ¿Cómo lo hizo? Amplió el sentido de "punto" y de "recta" de manera que cumplieran dos objetivos esenciales:

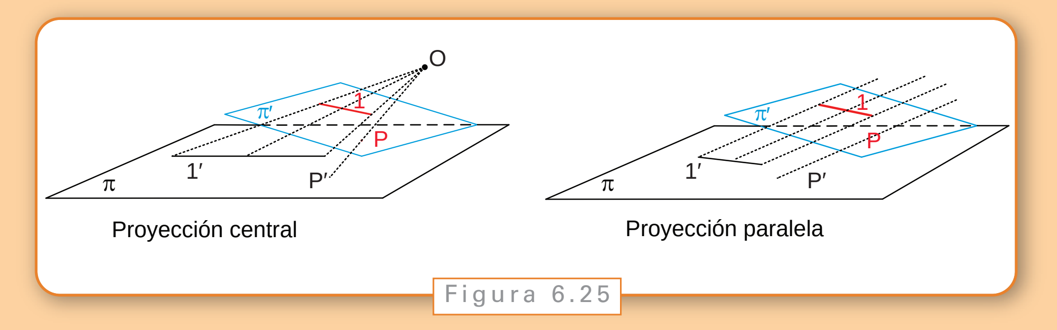


Figura 6.25

- Que siguieran valiendo los primeros 4 postulados de Euclides, con lo cual valdrían todos los teoremas demostrados usando esos postulados.
- Que dos rectas paralelas se intersecaran en un único punto.

6.3.2. Las geometrías no-euclidianas.

Ya vimos los primeros cinco postulados de Euclides en el capítulo 2:

1. Desde cualquier punto a cualquier otro se puede trazar una recta..
2. Toda recta limitada puede prolongarse indefinidamente en la misma dirección.
3. Con cualquier centro y cualquier radio se puede trazar una circunferencia.
4. Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.
5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma de un mismo lado ángulos internos menores que dos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en que están los ángulos menores que dos rectos.

Durante siglos los matemáticos creyeron que, en realidad, el quinto postulado podía ser demostrado en base a los demás. Gracias a estos esfuerzos lo que se consiguió fueron diferentes enunciados que eran equivalentes al original; o sea, eran verdaderos si éste lo era pero no eran demostrables en sí mismos. Ya vimos uno en el capítulo anterior, cuando analizamos la geometría esférica. Listemos aquí distintos enunciados equivalentes:

- Dos rectas paralelas son equidistantes.
- Si tres puntos están de un mismo lado de una recta y equidistan de ella, los tres puntos pertenecen a una misma recta.
- Si una recta encuentra a una de dos paralelas, encuentra necesariamente a la otra. Esto también puede enunciarse diciendo que dos rectas paralelas a una tercera son siempre paralelas entre sí.
- Por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta.

- Por un punto cualquiera, tomado en el interior de un ángulo, se puede siempre trazar una recta que encuentre a los dos lados del ángulo.
- Dado un triángulo cualquiera existe siempre uno semejante de magnitud arbitraria.
- La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos.
- Existen triángulos de área tan grande como se quiera.
- Por tres puntos no alineados pasa siempre una circunferencia.

Es muy instructivo analizarlos y demostrar que son equivalentes al quinto postulado. Para demostrar esta equivalencia, se deben demostrar dos cosas: primero, que el enunciado elegido se deduce de los cinco postulados de Euclides; segundo, que reemplazando el quinto postulado por el enunciado, el quinto postulado se puede demostrar a partir de los cuatro primeros y el que hemos elegido.

El problema era que algunos de estos enunciados parecían demasiado evidentes para nuestra percepción del mundo, no podían “no ser ciertos”. La “realidad” los apoyaba.

Por ejemplo; según Euclides, dos rectas paralelas son aquellas que, estando en un mismo plano, no se encuentran al prolongarlas indefinidamente en ambas direcciones siendo una recta “aquella línea que yace igualmente respecto de todos sus puntos”. Con esta imagen, prácticamente estamos obligados a pensar en una recta como en una línea “derecha”. Pero, ¿qué pasa si deformamos el plano donde está contenida esa recta? Nuestra recta podría estar “curvada”, como lo vimos con los círculos máximos en el capítulo anterior. En esta nueva situación tiene mucho sentido plantearse si dos rectas podrían acercarse indefinidamente sin tocarse.

Después de siglos de tratar de demostrar el quinto postulado se empezó a pensar en probar por otro camino… suponer que no se podía demostrar. La idea era directamente negar el postulado y construir nuevamente la geometría sin él, con la esperanza de llegar a una contradicción. Lo que se logró fue la construcción de geometrías diferentes e igualmente válidas a la geometría euclidiana; todas ellas consistentes lógicamente (o compatibles) solamente si las otras también lo eran.

Partiendo de la formulación “por un punto exterior a una recta se puede trazar una y sólo una paralela a dicha recta” podemos elegir dos caminos para la negación del postulado. Una opción es decir que no se puede trazar ninguna paralela, con lo que llegamos a lo que se denomina geometría elíptica (la geometría esférica es un caso particular, cuando la elipse es en realidad un círculo; podemos pensar en la geometría sobre una pelota de rugby). Otra opción es admitir la existencia de paralelas, pero que no sean únicas. Si se propone que por un punto externo a una recta pasan

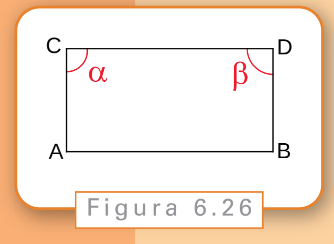


Figura 6.26

varias rectas paralelas se obtiene la geometría hiperbólica. Esta última es la que obtendríamos suponiendo que dos rectas paralelas se cruzan en un único punto.

Otra manera de llegar a las geometrías no euclidianas es usando el llamado Cuadrilátero de Saccheri (figura 6.26). Por los extremos de un segmento AB se trazan segmentos iguales AC y BD, ambos perpendiculares a AB y se unen los puntos C y D con una recta. Se demuestra que los ángulos α y β son iguales, pero las posibilidades para α y β son:

1. ambos ángulos son rectos.
2. ambos ángulos son obtusos.
3. ambos ángulos son agudos.

Éstas son conocidas como las hipótesis del ángulo recto, obtuso y agudo. Se puede demostrar que equivalen, en la forma del postulado “la suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a dos rectos” a suponer dicha suma igual, mayor o menor que dos ángulos rectos.

Siguiendo la primera hipótesis se llega a la geometría euclidiana. Siguiendo la segunda hipótesis se deduce que las rectas deben ser finitas, lo que fue tomado en su momento como un absurdo; sin embargo, se trata de las rectas de la geometría elíptica (y en el caso particular de la geometría esférica ya vimos que la suma de los ángulos interiores de un triángulo era mayor a dos rectos). Finalmente si se consideran los ángulos agudos se obtiene la geometría hiperbólica.

Observación: cuando asociamos la geometría euclidiana a la geometría de la realidad, estamos pensando en el espacio tridimensional en el que nos movemos y medimos distancias o ángulos. Sin embargo, nuestra interpretación visual de la realidad coincide más con la geometría proyectiva, porque vemos en perspectiva; no vemos el tamaño real de los objetos (como la Luna), ni tampoco su forma verdadera. Como hemos visto en la sección de anamorfosis, nuestra ubicación -el punto de vista- influye en la forma o el tamaño que percibimos. Por otra parte, ya vimos que si necesitamos mediciones a gran escala sobre la superficie de la Tierra, su curvatura juega un papel importante y, en ese caso, la geometría que nos sirve es la esférica.

6.4. Los axiomas de la geometría proyectiva

Para seguir adelante en la construcción de nuestra geometría tenemos que decidir cuál es el punto donde se cruzan dos rectas paralelas. Nuevamente, los ejemplos de la pers-

pectiva en el arte o el de las vías del tren nos sirven: muy lejos o en el "infinito"… y eso funciona. Agregaremos el punto del infinito. Primero, agreguemos algunas definiciones que simplifiquen el lenguaje.

Se dice que tres puntos son *colineales* si están en una misma recta. | **Definición**

Se dice que tres rectas son *concurrentes* si pasan por un mismo punto. | **Definición**

Cuando un punto pertenece a una recta, o una recta pasa por un punto, decimos que son *incidentes*. | **Definición**

Tendremos ahora otro lugar donde hacer geometría con los nuevos elementos que agregamos: será el plano proyectivo. Este plano está formado por los puntos y rectas del plano de la geometría usual (de Euclides) y los nuevos puntos del infinito.

Lo que queremos que se cumpla es lo siguiente:

- Que cada recta del plano usual tenga asociado un punto ideal (punto en el infinito).
- El punto ideal de una recta pertenecerá a todas las rectas paralelas a la dada y a ninguna otra (todas las rectas paralelas a una dada se encuentran en este punto).

Para lograrlo, basta con pedir que se cumplan los dos siguientes axiomas:

Dados dos puntos existe una única recta incidente a ambos. | **Axioma 1**

Dadas dos rectas existe un único punto incidente a ambas. | **Axioma 2**

Hasta ahora nos preocupamos porque todas las rectas pudieran intersecarse, pero también tiene que cumplirse el viejo axioma de que por dos puntos pase siempre una única recta. Cuando estos puntos son dos puntos ideales, la recta no puede ser una recta usual ya que ésta tiene un único punto ideal. Lo más sencillo es introducir una recta ideal, formada por todos los puntos ideales, la recta del infinito. Una manera muy gráfica de pensar en ella es asociarla a la recta del horizonte.

Faltaría ver si estos cambios afectan a las definiciones de proyección, pero en realidad el nuevo plano nos ayuda, ya que lo que antes era una proyección paralela ahora es una proyección central desde un punto ideal (como los rayos que proyectan son paralelos entre sí, se cruzan en el punto ideal).

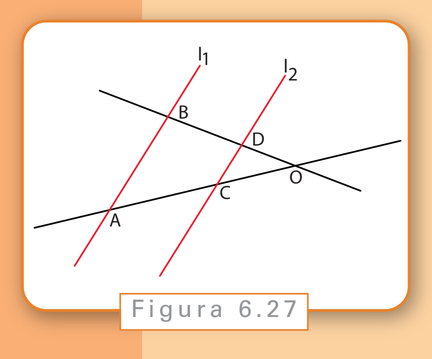


Figura 6.27

Por ejemplo, en los dibujos en perspectiva estábamos proyectando desde el punto de fuga y nuestro horizonte correspondía a la recta del infinito. En la figura 6.1, el punto de fuga es un punto ideal.

Una vez definido el espacio donde la geometría proyectiva tiene sus figuras, vamos a tratar de descubrir las propiedades que se preservan si proyectamos esas figuras desde cualquier punto. Y ya vimos que, por ejemplo, incidencia, concurrencia y colinealidad son propiedades proyectivas. O sea que el teorema de Desargues en el espacio es un teorema de la geometría proyectiva: lo único que usamos para demostrarlo fueron intersecciones (incidencias).

En el caso del teorema en el plano, proyectar puede ayudarnos más todavía. Como las propiedades se mantienen en cualquier figura a la que lleguemos usando proyecciones, si encontramos alguna para la que quede demostrado, entonces vale para todas.

Con todas estas nuevas definiciones se puede probar Desargues en el plano con poco trabajo. Para esto vamos a usar la siguiente versión del Teorema de Thales, correspondiente a la figura 6.27.

Teorema

Sean dos rectas que se cruzan en un punto O, y que intersecan un par de rectas l_1 y l_2 en los puntos A, B, C, D. Entonces, l_1 es paralela a l_2 si y sólo si

$$\frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD}$$

Ejercicio 2

Demostrar este teorema.

Veamos ahora otra demostración del Teorema de Desargues:

Teorema de Desargues

Si dos triángulos ABC y A'B'C' en un plano están situados de tal manera que las rectas que unen los vértices correspondientes (A y A', B y B', C y C') se cruzan en un punto O, entonces los pares de lados correspondientes se intersecan en tres puntos que están situados sobre una misma recta.

Demostración

Supongamos que podemos llegar a la situación de la figura 6.28 (donde Q y R están en el infinito) por alguna proyección de la figura original. Si el teorema vale en esta situación, entonces vale en general.

Para ver que P, Q, y R son colineales, como R y Q están en el infinito, bastaría con ver que P está en el infinito también (B'A' paralela a BA). Lo que queremos ver es que los tres puntos están en la recta ideal. Para eso, en la figura 6.29 introducimos las distancias a los puntos A, B, C, A', B', C' desde O.

Por el Teorema anterior, si podemos probar que v/u=s/r entonces B'A' es paralela a BA.

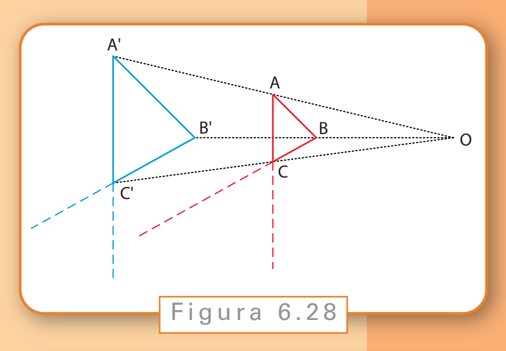


Figura 6.28

Pero sabemos que A'C' es paralela a AC y que C'B' es paralela a CB entonces, utilizando nuevamente el Teorema,

$$\frac{y}{x} = \frac{s}{r}$$

y también

$$\frac{y}{x} = \frac{v}{u}$$

Por lo tanto, igualando $\frac{y}{x}$ hemos obtenido que $\frac{v}{u} = \frac{s}{r}$.

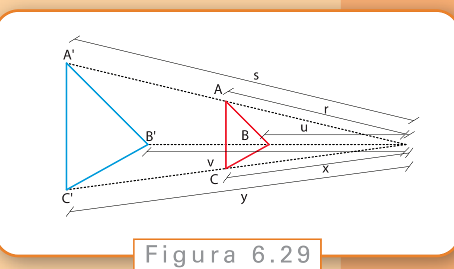


Figura 6.29

Ahora veamos cómo llegar a esta figura utilizando proyecciones.

Para que una proyección mande Q y R al infinito tenemos que elegir el centro de proyección O' de manera que esté en un plano π que también contenga a Q y R (ver figura 6.30). Entonces, si hacemos la proyección sobre un plano paralelo a π como π', las rectas que unen O' con R y Q son paralelas al plano π', y por lo tanto lo cortan en el infinito.

Figura 6.30

A pesar de lo novedoso de la idea de Desargues, sólo interesó a un pequeño grupo de matemáticos ya que en ese momento la geometría analítica estaba en pleno desarrollo. En ese grupo se encontraba Blaise Pascal, quien con sólo 16 años y siguiendo el trabajo de Desargues escribió su primer tratado de matemática, y en él probó un teorema que llamó *mysterium hexagrammicum* y que ahora lleva su nombre.

Teorema de Pascal

Si los vértices de un hexágono yacen alternativamente en un par de rectas que se intersecan, entonces las tres intersecciones P, Q y R de los lados opuestos del hexágono son colineales.

Como se puede ver en la figura 6.31, se trata de un hexágono en el sentido amplio, o sea que puede intersecarse a sí mismo.

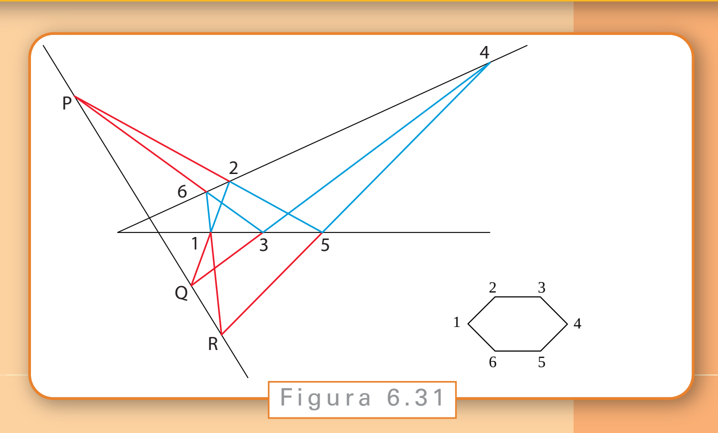


Figura 6.31

Ejercicio 3 | **Demostrar el teorema de Pascal.**

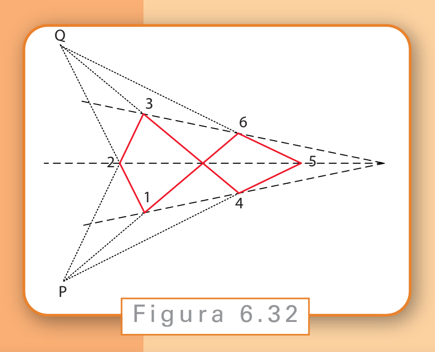


Figura 6.32

Casi 160 años después, con Gaspard Monge y su discípulo Charles Julien Brianchon, logra renacer la geometría proyectiva. En el caso de Monge, quien era oficial del ejército de Napoleón y físico además de matemático, su aporte principal fue a la geometría descriptiva, aquélla que investiga sobre técnicas de tipo geométrico que permiten representar objetos tridimensionales sobre superficies planas y la forma de recuperar las características de estas figuras en dos dimensiones en su correspondiente del espacio. Por su parte Brianchon logra demostrar el teorema dual del teorema de Pascal, que reproducimos en la figura 6.32:

Teorema de Brianchon | *Si los lados de un hexágono pasan alternativamente por dos puntos P y Q fijos, entonces las tres diagonales que unen pares de vértices opuestos del hexágono son concurrentes.*

Ejercicio 4 | **Demostrar el teorema de Brianchon**

La relación entre los teoremas de Pascal y de Brianchon, que hemos denominado *dual*, es un concepto profundo que aparece con la geometría proyectiva. Los teoremas duales surgen de reemplazar “vértices” por “lados”, “yacen alternativamente” por “pasan alternativamente”, “puntos” por “rectas” y “son colineales” por “son concurrentes”. Todo teorema que involucra estos términos puede dualizarse, y obtenemos así un nuevo teorema.

Por ejemplo, en la geometría euclídea sabemos que por dos puntos siempre pasa una recta (dos puntos son colineales). Pero no siempre dos rectas se intersecan (no siempre son concurrentes). En cambio, en el plano proyectivo son enunciados duales:

Dos puntos son colineales
Dos rectas son concurrentes.

Esto no es casualidad, ni ocurre para estos casos particulares, sino que ocurre para todos los teoremas de la geometría proyectiva. Este hecho fue descubierto por Jean-Victor Poncelet, otro militar francés, quien escribió un tratado de geometría proyectiva en la prisión de Saratoff, durante la campaña de Napoleón contra Rusia, entre 1813 y 1814.

Poncelet descubrió esta relación dual entre puntos y rectas, así como algunas de sus operaciones. Por ejemplo, trazar una recta por un punto es la operación dual de marcar un punto en una recta.

Principio de dualidad de Poncelet | *El dual de cualquier teorema de la geometría proyectiva, también es un teorema de la geometría proyectiva.*

Es decir, si un teorema es verdadero entonces su teorema dual también lo es. Esto sólo puede valer donde todo elemento tiene su dual. En la geometría clásica, por ejemplo, no existe el dual de un ángulo. Esto proviene de una característica particular de la construcción del plano proyectivo, pero para verlo más claramente era necesario salir de los métodos axiomáticos y de alguna manera incluir los métodos algebraicos y numéricos que siempre se habían rechazado en este tipo de geometría. Esto se logró gracias a Julius Plücker, Augustus Möbius y Étienne Bobillier, cuando alrededor de 1829 y en medio de una pelea entre matemáticos "sintéticos" (aquellos que defendían una geometría conceptual, basada en los axiomas) y "algebraicos" (quienes proponían introducir coordenadas) introdujeron el uso de las coordenadas homogéneas en la geometría proyectiva.

6.5. Coordenadas homogéneas

Hemos visto brevemente el uso de coordenadas en la geometría euclidiana y en la geometría esférica, como así también recorrimos algunos de los principales sistemas de coordenadas (cartesianas, polares). Las coordenadas homogéneas juegan el mismo papel de las coordenadas cartesianas, pero parametrizan el plano proyectivo. Son ternas de números que identifican sus puntos, por lo que pusieron al alcance de los geómetras todas las herramientas algebraicas y analíticas que antes no tenían.

En general, las coordenadas de un objeto geométrico son cualquier conjunto de números que caracterice ese objeto de forma única. En el plano usual, con las coordenadas cartesianas se necesitan dos números para identificar un punto; por ejemplo, podemos elegir el primero para la posición horizontal y el segundo para la vertical (ver figura 6.33).

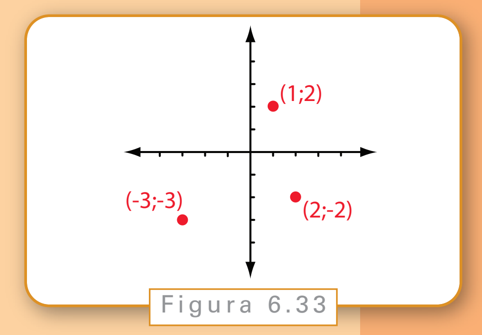


Figura 6.33

En el caso de las coordenadas polares, dábamos el ángulo con el eje X y la distancia al origen.

Pero para el plano proyectivo tendríamos problemas con los puntos del infinito. Sin embargo, la solución viene de "salir" del plano para agregar una nueva coordenada que nos diga si el punto es ideal o no.

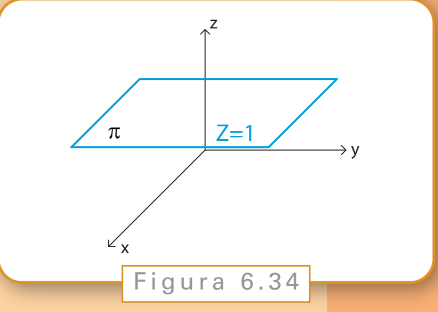


Figura 6.34

Pensemos en el plano proyectivo π ubicado en el espacio tridimensional como se muestra en la figura 6.34

O sea, si la tercera coordenada de un punto en el espacio es la altura, los puntos del plano euclídeo usual serían de la forma (x, y, 1), pero esto no alcanza para los puntos en el infinito: si un punto del infinito estuviese indicado como (a, b, 1), coincidiría con el punto del plano de coordenadas cartesianas (a, b).

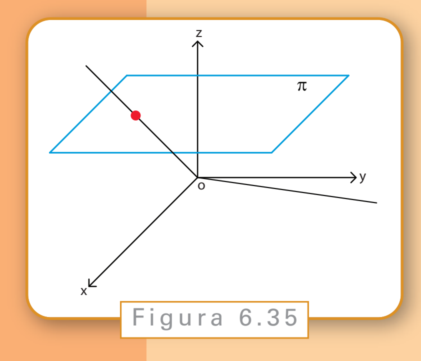


Figura 6.35

Volvamos entonces a la idea de proyección. Si nuestro centro es el origen de coordenadas O = (0,0,0), entonces para cualquier punto de π tenemos una recta que pasa por O. Y para los puntos en el infinito, tenemos rectas paralelas a π que pasan por el origen (ver figura 6.35)

Las coordenadas homogéneas de cualquier punto P del plano proyectivo van a ser las coordenadas en el espacio de cualquier punto Q (distinto del origen) que esté en la recta que une a P con O. Si el punto es ordinario podemos elegir, por ejemplo, (a,b,1); pero en general sirve cualquier terna de la forma

$$(ta, tb, t) \quad \text{con} \quad t \neq 0.$$

(Estamos usando aquí la ecuación paramétrica de una recta en el espacio.) En otras palabras, a cada punto del plano le hemos asociado una recta. En el caso de un punto en el infinito, lo representaremos como (x, y, 0). Podemos pensar que (x,y) nos da la dirección de las rectas paralelas que se cruzarían en este punto ideal P.

Entonces, a cada punto del plano le hemos asignado una recta del espacio tridimensional. ¿Y qué les toca a las rectas? Veamos la figura 6.36

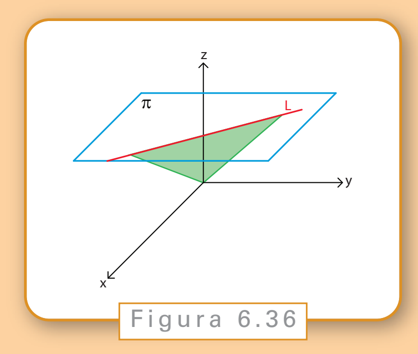


Figura 6.36

Hemos dicho que a cada punto de L le correspondía una recta del espacio pasando por el origen. Entonces, juntando todas estas rectas podemos pensar que a L le corresponde, en el espacio, un plano. Este plano pasa por el origen y contiene la recta L.

Deberíamos darle a L las coordenadas de ese plano en el espacio. Esto se aclara cuando miramos la ecuación que satisface un plano: un punto (x, y, z) está en un plano que pasa por el origen cuando es solución de una igualdad del tipo

$$ax + by + cz = 0$$

donde a, b y c son números que nos dicen cómo es el plano (qué “inclinación” tiene).

Así que podemos definir las coordenadas de L como la terna de números (a, b, c) que corresponden a la ecuación del plano que pasa por el origen y que tiene al vector (a, b, c) como normal. Esto incluye la recta en el infinito, porque en este caso el plano que da las coordenadas es el plano paralelo a π que pasa por el origen de ecuación z=0.

Estas coordenadas nos muestran cómo rectas y puntos pueden intercambiar lugares en la geometría proyectiva.

En primer lugar, puntos y rectas quedan definidos por ternas de números (distintos de (0, 0, 0)), es decir que si nos dan una terna de coordenadas, no podemos distinguir si son de una recta o de un punto.

En segundo lugar, si tenemos dos ternas de coordenadas (x, y, z) y (a, b, c) que cumplen que ax + by + cz = 0 (o, equivalentemente, xa + yb + zc = 0). ¿Diríamos que el punto de coordenadas (x, y, z) pertenece a la recta de coordenadas (a, b, c) o que el punto de coordenadas (a, b, c) pertenece a la recta de coordenadas (x, y, z)? Todo depende de la interpretación que queramos darle y no de una diferencia real.

Observemos también que las ternas que definen tanto a puntos como a rectas están asociadas con direcciones, la dirección de la recta que pasa por el origen para los puntos, y la normal al plano para las rectas.

Recordemos que una de las propiedades básicas de las proyecciones era que una recta se proyectaba en otra recta. Gracias al sistema de coordenadas que introducimos, ahora podemos darle una forma matemática a la proyección. Una recta en el plano proyectivo está dada por las coordenadas (ta, tb, t) con $t \neq 0$, y queremos que su proyección sea otra recta del plano proyectivo dada por (tc, td, t) con $t \neq 0$. Las únicas funciones que cumplen con esta propiedad, sin contar las translaciones, son las transformaciones lineales.

Las transformaciones lineales dilatan y contraen al espacio de una manera tal que las propiedades proyectivas se conservan. ¿Existirá algún grupo de funciones que tampoco cambien el tamaño de los objetos? La respuesta es que sí, y son los movimientos rígidos: las rotaciones y reflexiones; que son un subconjunto de las transformaciones lineales.

En 1872, y a los 23 años de edad, el matemático alemán Félix Klein presentó el llamado *Programa de Erlangen*, donde mostraba que todas las geometrías podían definirse de una manera distinta a la axiomática; cada geometría abarcaba el estudio de las propiedades del espacio que son invariantes bajo un grupo dado de transformaciones. En el caso de la geometría euclidea, son los movimientos rígidos; en el caso de la geometría proyectiva, son las transformaciones lineales.

6.6. Habitación de Ames

Una habitación de Ames es una ilusión óptica tridimensional, donde una persona parece cambiar de tamaño a medida que se mueve lateralmente desde una pared a la otra.

La ilusión se vale del hecho que nuestro cerebro cree ver una habitación cuadrada cuando en realidad el cuarto está deformado de manera que una esquina está más alejada. Esto sucede porque el ojo no recibe información sobre el tamaño de los objetos sino sobre el ángulo que abarca su imagen en la retina. Ya menciona-

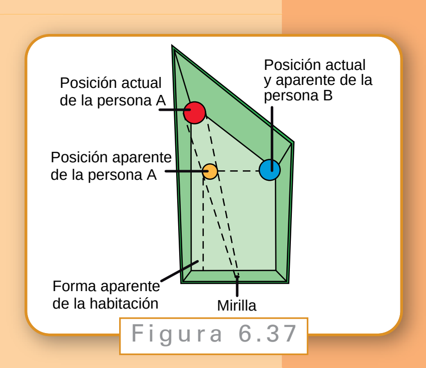


Figura 6.37

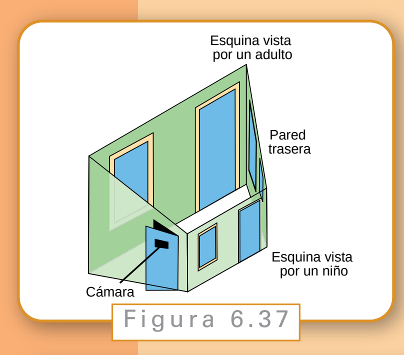
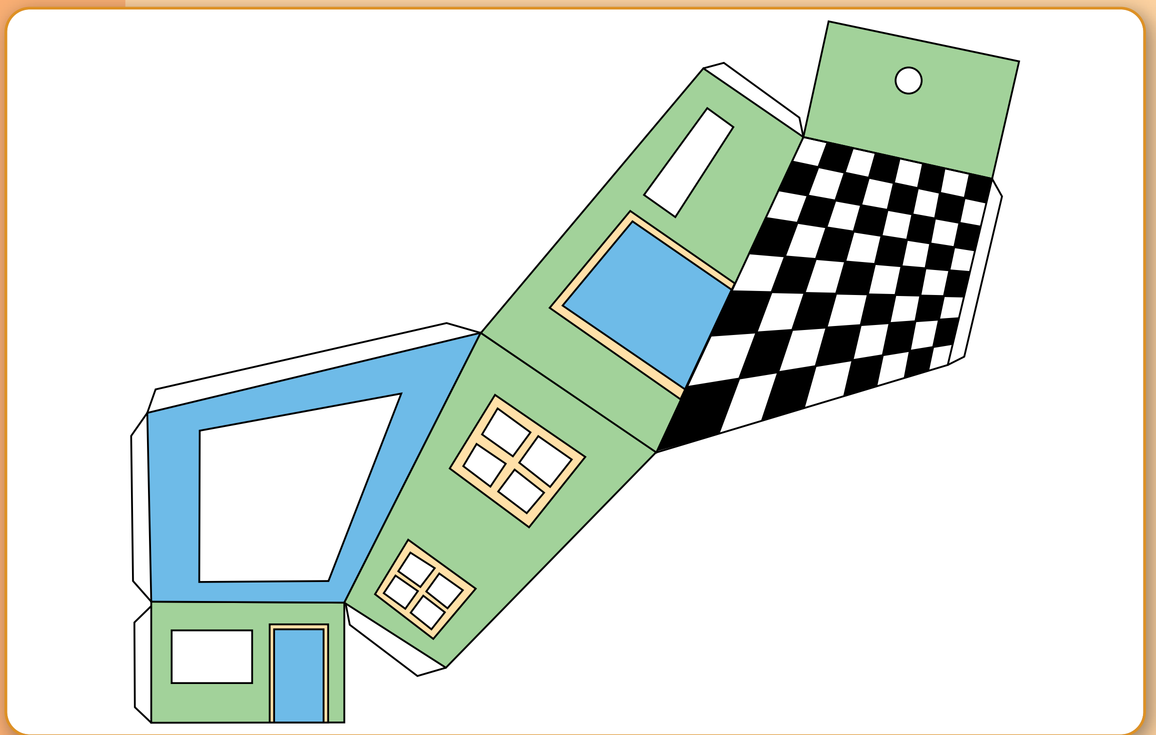


Figura 6.37

mos que vemos la Luna más grande en su proximidad con el horizonte; como la comparamos con algo que se encuentra más cerca automáticamente debe ser porque el tamaño es mayor. En este juego se basa la ilusión de la habitación de Ames, no nos damos cuenta que la persona se aleja, y por lo tanto la interpretación es que se achica.

Para construir una habitación de Ames pequeña se puede ampliar e imprimir la siguiente figura.



Una vez caladas las ventanas, el techo y el punto de observación (marcados con x), se arma y se pega. Se pueden pasar objetos no muy grandes por detrás de las ventanas para ver cómo cambian de tamaño o colocar distintos objetos dentro para compararlos.

Ahora, si se quiere construir una habitación de Ames de mayor tamaño es necesario un poco más de trabajo.

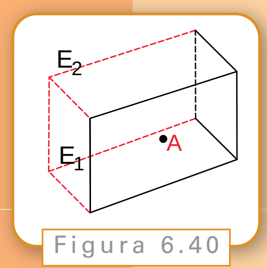


Figura 6.40

Queremos lograr que el observador situado en A vea una habitación normal. Entonces las esquinas del lado izquierdo y de la parte de atrás deberían ser E_1, y E_2. Este es el lado que se construirá más atrás.

Marcamos la línea de visión de la esquina, L y elegimos cuán lejos queremos que se vea la esquina E_2, en el punto P.

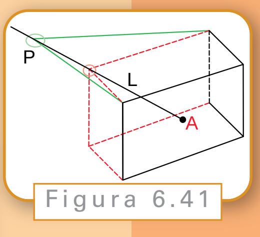


Figura 6.41

Como queremos que la unión de las dos paredes sea recta, nos queda determinada la posición de la falsa esquina E_1, Q en la intersección de la vertical que baja de P al suelo. Observemos que quedan alineados el punto donde realmente estará la esquina de la habitación, el punto donde nosotros la veremos y nuestros pies.

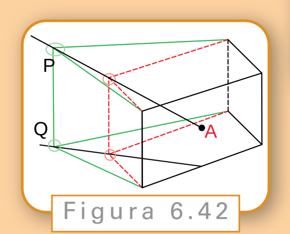


Figura 6.42

Para poder completar el diseño interior, necesitamos saber cómo se altera cada objeto que nos encontremos: las baldosas del piso, alguna ventana, una puerta. En general se utilizan objetos con bordes rectos para facilitar los cálculos.

Para lograr esto lo más conveniente es pensar que una transformación lineal T deforma el espacio de tal manera que manda las líneas rojas a las verdes. Para encontrarla usaremos que las transformaciones lineales quedan definidas dando su valor sobre una base.

Elijamos entonces un origen de coordenadas, por ejemplo nuestro origen se encontrará en la esquina inferior derecha de la parte frontal de la habitación. De esta manera es fácil interpretar la posición de todas las esquinas, en particular de E_1 y E_2.

$E_1=(x,y,0)$ $E_2=(x,y,z)$ $E_3=(x,0,0)$

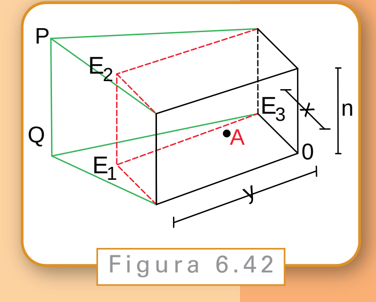


Figura 6.42

Si pensamos en estos puntos como vectores ya tenemos nuestra base y la transformación queda definida como la única transformación que cumple:

$T(E_1)=Q$ $T(E_2)=P$ $T(E_3)=E_3$

Veamos un ejemplo, si consideramos una habitación original de 4 m de frente, 4 m de profundidad y 2,5 m de altura tenemos

$x=4$ $y=4$ $z=2,5$

Entonces

$E_1=(4;4;0)$ $E_2=(4;4;2,5)$ $E_3=(4;0;0)$

Y por lo tanto nuestra transformación cumple que

$T(4;4;0)=Q$ $T(4;4;2,5)=P$ $T(4;0;0)= (4;0;0)$

Ahora tenemos que elegir P en la línea de visión que corresponde a E_2, o sea P tiene

que pertenecer a la recta que pasa por E_2 y A. Consideremos un punto de observación centrado y a 1,7m del piso, o sea

$$A=(0;2;1,7)$$

Los puntos (a,b,c) que pertenecen a la recta que pasa por E_2 y A son de la forma

$$(a,b,c) = t(4;2;0,8) + (4;4;2,5)$$

Para t>0, obtendremos puntos "detrás" de E_2. Si elegimos t=0,5 obtendremos P=(a,b,c)=(6;5;2,9) y como Q se encontraba bajando desde P en forma vertical nos queda Q=(6;5;0).

De esta manera, cuando una persona camine por el fondo de la pieza, se estará alejando 2m hacia atrás y 1m en sentido lateral.

Obtuvimos entonces los últimos datos necesarios para encontrar T

$$T(4;4;0) = (6;5;0) \qquad T(4;4;2,5) = (6;5;2,9) \qquad T(4;0;0) = (4;0;0)$$

T está dada por

$$T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+0,5x_2;1,25x_2;1,16x_3)$$

Con esta función podemos terminar de determinar la posición correcta para cada objeto o figura que queramos agregar, como por ejemplo un cuadro en la pared posterior. Basta con ubicar las coordenadas de los vértices en la habitación original y ver dónde los ubica nuestra transformación.

Veamos cómo obtener esta última expresión.

Por definición una transformación lineal cumple que:

$$T(u+v)=T(u)+T(v)$$

$$T(\lambda u)=\lambda\, T(u)$$

donde u y v son vectores (ternas de números en nuestro caso) y λ es un número cualquiera.

Queremos encontrar una expresión para T(x,y,z) sabiendo que

$$T(4;4;0)=(6;5;0) \qquad T(4;4;2,5)=(6;5;2,9) \qquad T(4;0;0)= (4;0;0)$$

Y que los vectores (4;4;0), (4;4;2,5) y (4;0;0) forman una base, o sea que dado un vector (x,y,z,) cualquiera, podemos encontrarle una única terna de números (α,β,γ) que cumple

$$(x,y,z) = \alpha(4;4;0) + \beta(4;4;2,5) + \gamma(4;0;0)$$

Para eso igualamos coordenada a coordenada, obteniendo un sistema de ecuaciones

$$(x,y,z) = \alpha(4;4;0)+\beta(4;4;2,5)+\gamma(4;0;0)$$

$$= (4\alpha+4\beta+4\gamma;4\alpha +4\beta;2,5\beta)$$

$$x=4\alpha+4\beta+4\gamma \qquad (I)$$

$$y=4\alpha +4\beta \qquad (II)$$

$$z=2,5\beta \qquad (III)$$

De III tenemos que $\beta=0,4z$

Reemplazando en II podemos despejar $4\alpha=y-4\beta=y-1,6z$

Entonces $\alpha=0,25y-0,4z$

Reemplazando ahora en I obtenemos $4\gamma=x-4\alpha-4\beta=x-(y-1,6z)-1,6z=x-y$

Entonces $\gamma=0,25x-0,25y$

Volvamos ahora a nuestra función T

$$T(x,y,z) = T(\alpha(4;4;0)+\beta(4;4;2,5)+\gamma(4;0;0))$$

$$= \alpha T(4;4;0)+\beta T(4;4;2,5)+\gamma T((4;0;0)$$

Por ser una transformación lineal.

Usando ahora los datos que tenemos queda

$$T(x,y,z) = \alpha(6;5;0)+\beta(6;5;2,9)+\gamma(4;0;0)$$

$$= (0,25y-0,4z)\ (6;5;0)+0,4z(6;5;2,9)+(0,25x-0,25y)\ (4;0;0)$$

$$= (1,5y-2,4z;1,25y-2z;0)+(2,4z;2z;1,16z)+(x-y;0;0)$$

$$= (x+0,5y;1,25y,1,16z)$$

Capítulo 7

Que no entre quien no sepa topología

Pablo Amster

7.1. Revelación de un amor

Corría el año 1629 cuando el filósofo inglés Thomas Hobbes se encontraba de visita en París. Entonces tuvo una sorprendente revelación, que habría de cambiar el rumbo de su pensamiento. Según relata un amigo suyo, J. Autrey, en *A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679*:

> *Tenía 40 años cuando por primera vez se fijó en la geometría; y ello aconteció accidentalmente. Encontrábase en la biblioteca de un caballero; abiertos estaban los Elementos de Euclides, y fue la Proposición 47, El. libri I. Leyó la Proposición. Por Dios (pues de cuando en cuando gustaba de proferir un exaltado Juramento, para mayor énfasis) ¡esto es imposible! Leyó pues la Demostración, en la que aludía a una Proposición previa; proposición que también leyó. La cual mencionaba otra anterior, que leyó también. et sic deinceps [y así sucesivamente] hasta quedar al fin demostrativamente convencido de aquella verdad. Ello le hizo enamorarse de la geometría.*

A partir de ese día, comenzó a proclamar cosas tales como: "No entiende teología quien no entiende filosofía" y "no entiende filosofía quien no sabe matemáticas", que deben haber causado cierta inquietud entre los filósofos (y más aún entre los teólogos).

Para el lector que no se conozca de memoria los cinco libros de Euclides, conviene aclarar que la tan misteriosa "Proposición 47" no es otra que el más célebre enunciado geométrico de todos los tiempos, aquel que se conoce como *Teorema de Pitágoras*. Y las proclamas de Hobbes remiten sin duda a la inscripción que se hallaba a la entrada de la renombrada Academia de Platón: "Que no entre quien no sepa Geometría".

Esta puede parecer una acogida un tanto extraña para el visitante desprevenido, bastante diferente de las frases de bienvenida que suelen leerse en los felpudos. Sin embargo, refleja toda una doctrina. Para Platón, el mundo real es una copia de un mundo de ideas, que se rige por la idea del Bien y fue construido por un Demiurgo o creador. Pero la piedra fundamental de su creación es matemática; más concretamente, podemos decir que no se trata de una sino de cinco piedras. En efecto, el principio fundamental de la creación lo constituyen aquellos cinco poliedros regulares que hoy se conocen como *cuerpos platónicos*: el tetraedro, el cubo, el octaedro, el icosaedro y el dodecaedro. Los cuatro primeros corresponden a los cuatro elementos (fuego, tierra, aire y agua), mientras que el último se reserva para dar al universo el toque final, su última pincela-

da: como dice el *Timeo* de Platón, "Dios se sirvió de él [el dodecaedro] para componer el orden final del Todo". La importancia que se concedió a estos cinco sólidos es tan grande, que hay quienes sostienen que los Elementos de Euclides son apenas una narración detallada (y sin duda excelente) de la teoría de los cuerpos platónicos.

A pesar de su aparente ingenuidad, la influencia de las ideas platónicas persiste hasta nuestros días[1]; en cierto sentido, esa es la razón por la que la matemática tiene tanta presencia en los programas de estudio, desde el primer año de la escuela hasta el último.

Pero los tiempos han cambiado desde entonces. Para los griegos, la matemática se reducía casi exclusivamente a la geometría: lo demás era apenas un apoyo, un puñado de instrumentos auxiliares para estudiar las verdades concernientes a ese mundo minuciosamente descripto en los Elementos. Sin embargo, la matemática actual se compone de muy diversas ramas de gran importancia: incluso la propia geometría, se ha extendido y desarrollado a tal punto que la geometría "clásica" o euclidiana es tan sólo una pequeña porción. Y, de alguna forma, puede decirse que la auténtica base del pensamiento geométrico se encuentra en una de estas nuevas ramas, que comenzaría surgir unos veinte siglos después de Euclides. En efecto, fue el gran matemático y filósofo G. Leibniz quien esbozó sus primeros fundamentos en unas cartas que escribió allá por 1679 y le dio el nombre de *Analysis Situs*; luego Euler avanzó otro poco. Pero recién en el siglo XIX esta nueva rama cobraría un rol preponderante, con los trabajos de Möbius y en especial de Listing, quien le dio el nombre con el que hoy se la conoce: *Topología*.

En este capítulo presentaremos las ideas básicas de esta nueva y extraña "geometría", en la que los objetos y las figuras parecen cobrar formas distintas. En especial, veremos que la topología prescinde por completo de la noción de *métrica* o distancia: las propiedades que estudia no son de carácter *cuantitativo* sino más bien c*ualitativo*.

Ahora bien, a pesar de su gran nivel de abstracción, la topología posee numerosas aplicaciones en los más variados terrenos. En particular, en las próximas páginas mostraremos cómo es posible verificar a partir de ella un notable hecho de carácter puramente geométrico, en el más clásico sentido de la palabra: la inexistencia de otros poliedros regulares aparte de los mencionados por Platón. De algún modo, las aplicaciones de esta clase parecen confirmar la opinión de otro gran matemático, el francés Poincaré en su libro *Últimos Pensamientos*:

> *[...] es para favorecer tal intuición [la geométrica] que el geómetra tiene necesidad de dibujar figuras o, por lo menos, representárselas mentalmente. Ahora bien, si desprecia las propiedades métricas o proyectivas de estas figuras, si sólo se atiene a sus propiedades puramente cualitativas, solamente entonces la intuición geométrica interviene verdaderamente. No es que quiera decir con esto que la geometría métrica reposa sobre la lógica pura, que en ella no intervenga ninguna verdad intuitiva, pero estas son intuiciones de otra naturaleza, análogas a las que desempeñan un papel esencial en aritmética y álgebra.*

---

[1] El inglés Alfred Whitehead llevó esta aseveración al extremo, cuando anunció que "toda la filosofía occidental es apenas una colección de notas a la filosofía de Platón". Como cabe imaginar, esta observación no cayó del todo bien a sus colegas filósofos.

Como sea, no deja de resultar sorprendente que un enunciado tan "métrico", que se refiere a los cuerpos platónicos pueda comprobarse apelando a ideas tan no-métricas, de orden exclusivamente topológico. No es aventurado imaginar que, de haberse topado con una demostración así, Hobbes se habría enamorado también de esta cautivante disciplina, nacida cincuenta años después de su "exaltado Juramento".

7.2. Débil es la geometría

En la sección previa hemos presentado a la topología como una suerte de "geometría no métrica". Pero esto que parece un contrasentido refleja en realidad un aspecto profundo de la matemática, como veremos a continuación.

Para comenzar, recordemos aquella antigua frase que dice: la geometría es el arte de razonar sobre figuras mal hechas. Esto se ve cuando inferimos alguna propiedad a partir de un dibujo: trazamos unas líneas (acaso en la arena, intentando imitar a Arquímedes) y observamos que las alturas de un triángulo se cortan en un único punto, o que la recta tangente a una circunferencia resulta perpendicular al radio. Sin embargo, de algún modo, estamos razonando sobre figuras mal hechas, especialmente en el sentido platónico mencionado en la sección previa: los dibujos no concuerdan con los objetos perfectos, ideales de la geometría. Pero pese a su imperfección, el dibujo es una valiosa ayuda a nuestra intuición, pues nos permite vislumbrar ciertas propiedades. De alguna manera, nos convencemos de que el dibujo "mal hecho" nos dice algo que es cierto; entonces llega el momento de recurrir a los postulados geométricos, para efectuar la demostración como Euclides manda. Recién en ese momento podemos dar por válidas las propiedades intuidas, presentidas en el dibujo.

Poincaré va un poco más allá, y se pregunta: ¿qué es una figura mal hecha? En la geometría euclidiana, dos figuras son equivalentes si se puede poner una sobre otra empleando únicamente rotaciones y traslaciones; desde este punto de vista hay que decir que el dibujo de la figura 7.1 es un círculo algo mal hecho.

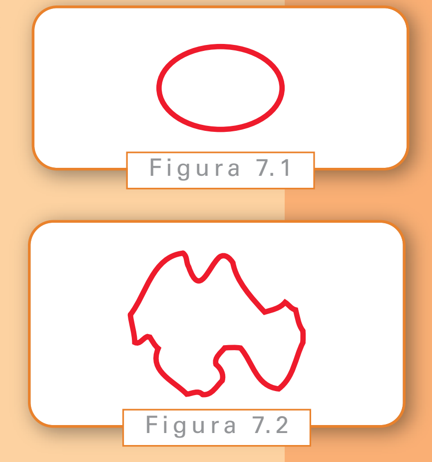


Figura 7.1

Figura 7.2

En cambio, no lo es para la geometría proyectiva desarrollada en el capítulo anterior: un círculo es equivalente a una elipse porque, a grandes rasgos, una de las figuras es una "perspectiva" de la otra. Pero aun aceptando perspectivas tan amplias, todo el mundo pensará sin duda que la curva de la figura 7.2 es una circunferencia MUY mal hecha. Todo atisbo de geometría parece haber quedado olvidado en ese sinuoso recorrido que en casi nada se asemeja a la circunferencia original.

Sin embargo, para la topología todavía se trata de figuras equivalentes: como se puede sospechar, el secreto reside en el "casi" del párrafo previo. Poincaré lo presenta del siguiente modo:

> *Supongamos un modelo cualquiera y la copia de este modelo, realizada por un dibujante poco diestro; las proporciones están alteradas; las rectas, trazadas por una mano temblorosa, han sufrido importunas desviaciones y presentan curvaturas malhadadas. Desde el punto de vista de la geometría proyectiva, las dos figuras no son equivalentes; por el contrario, lo son, desde el punto de vista del* Analysis Situs.

Esto justifica un poco mejor nuestra anterior circunferencia tembleque, y sus malhadadas curvas: un artista plástico sentiría que esta copia tan mal hecha es un fracaso, capaz de motivarlo a "colgar los pinceles". Sin embargo, las propiedades topológicas de la circunferencia se conservan: se trata de sus aspectos más esenciales; mejor dicho, los que hacen a su esencia topológica.

Según hemos mencionado informalmente, la topología pasa por alto las "cantidades" y sólo se fija en "cualidades": dos objetos O_1 y O_2 son equivalentes siempre que se pueda pasar de uno al otro por medio de cierto tipo de transformación, denominada *homeomorfismo*. En términos más o menos rigurosos, se trata de una función $f : O_1 \to O_2$ que tiene las siguientes propiedades:

1. Es continua.

2. Es biyectiva.

3. La función inversa $f^{-1} : O_2 \to O_1$ es continua.

Para entender esto, resulta conveniente dar una noción aproximada de la idea de *continuidad*, que en el espacio común y corriente responde a la noción intuitiva de *deformación*, sin cortes o desgarraduras. En un curso básico de análisis matemático, se suele decir que una función es continua cuando a medida que nos aproximamos a cualquier valor x, los valores de la función se aproximan a su imagen $f(x)$. Pero esta definición, al margen de que le falta rigor, presenta el inconveniente de que la idea de "aproximarse" lleva implícita alguna noción de distancia. Para nuestros fines alcanza con aclarar que existe una manera de corregir este defecto, de modo que si cierta familia de puntos *converge* (en un sentido que se puede hacer preciso) a un valor x, entonces las respectivas imágenes de dichos puntos convergen a $f(x)$. Esta idea algo vaga es suficiente para entender que un homeomorfismo, que es una función continua "ida y vuelta" -es decir, con inversa continua- preserva determinadas propiedades de los objetos, los denominados *invariantes topológicos*. Una circunferencia conserva muchas de sus propiedades por más que se la estire, se la comprima un poco o se la deforme. Mientras no la cortemos o peguemos algunos de sus puntos entre sí, seguirá siendo una curva cerrada, sin autointersecciones. Esta particularidad que tiene la topología de ser tan "flexible" justifica aquel nombre coloquial con que también se la conoce: geometría del caucho. El resultado es una geometría con menos axiomas que la usual, que hace la vista gorda a las diferencias de orden "métrico" y sólo se concentra en otros aspectos más esenciales. Una geometría -por así decirlo- más permisiva: por eso suele decirse también que es una *geometría débil*.

7.3. Formulo, luego existo

En esta sección nos ocuparemos de una de las fórmulas más notables de la geometría de poliedros, conocida como *Fórmula de Euler* aunque, como sugiere el subtítulo, el primero que la demostró fue Descartes[2]. Nuestra intención es mostrar que para cualquier poliedro simple vale la relación

$$V + C - A = 2,$$

en donde V, C y A denotan, respectivamente, el número de vértices, caras y aristas. Pero antes de dar una prueba debemos aclarar el contexto en el que vamos a trabajar. Sin entrar en mayores detalles, diremos que un poliedro simple es aquel que resulta topológicamente equivalente a una esfera: de alguna forma, podemos imaginar que lo "inflamos" hasta obtener una pelota de fútbol. En el fondo, esto no parece tan desacertado, pues uno de los diseños más comunes de tan popular objeto está basado en un poliedro que pensó y dibujó un gran hombre del Renacimiento: Leonardo da Vinci.

Para nuestros fines es conveniente observar que todo poliedro simple se puede llevar a un plano de la siguiente manera: basta con eliminar una de sus caras, y "estirarlo" sobre el plano como si se tratase de un antiguo pergamino. Por ejemplo, en la figura 7.3 tenemos un posible aplanamiento de un cubo.

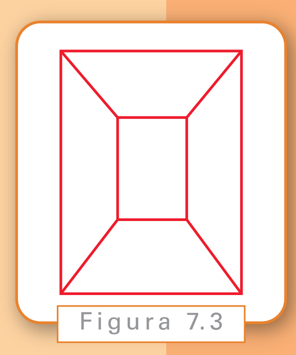


Figura 7.3

Es claro que el proceso obliga a alterar algunas de las caras y aristas del poliedro, y en consecuencia las dimensiones también se modifican respecto del original. Sin embargo, el número de vértices y aristas se conserva. Aunque sí se produce un cambio en el número de caras, pues hemos perdido una en el camino: de este modo, la fórmula que debemos probar para esta clase de redes planas de polígonos es la siguiente:

$$V + C - A = 1.$$

Para ello, vamos a definir una serie de operaciones "admisibles", que transformarán este gráfico en otro, para el cual la relación será obvia. Las operaciones son:

1. agregar una arista que una dos vértices no conectados previamente. De esta forma, V se mantiene, mientras que el número de caras y de aristas aumenta en una unidad. Esto quiere decir que el número $V + C - A$ no se modifica;

2. si un triángulo de la red comparte exactamente dos lados con el resto, se puede eliminar la arista no compartida, como se observa en la figura 7.4.

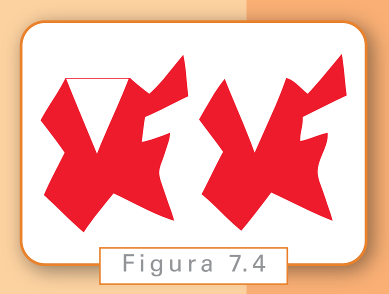


Figura 7.4

[2] El matemático alemán Felix Klein dijo una vez que si un teorema lleva el nombre de un matemático, entonces es seguro que este matemático no es su autor. Esto es algo exagerado, aunque hay ejemplos bastante notables, como el binomio de Newton, el triángulo de Pascal, o el propio teorema de Pitágoras.

El número de vértices queda igual, pero se elimina una cara y una arista: nuevamente, la cantidad $V + C - A$ se conserva.

3. si un triángulo de la red comparte un solo lado con el resto, se puede eliminar el vértice y las dos aristas correspondientes (ver figura 7.5)
De esta forma, el número de caras y el de vértices disminuye en una unidad, y el de aristas disminuye en dos unidades. Una vez más el valor $V + C - A$ permanece inalterado.

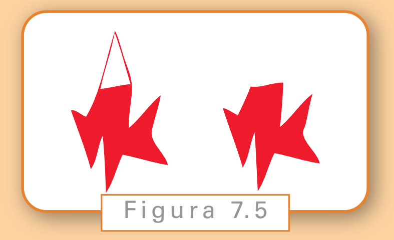


Figura 7.5

En base a estas operaciones, se puede proceder de la siguiente manera: en primer lugar, agregamos todas las diagonales que hagan falta, hasta que quede una red compuesta exclusivamente por triángulos. Luego vamos eliminando estos triángulos uno a uno, haciendo uso de las dos operaciones restantes. De este modo, llegaremos finalmente a un triángulo, en donde $V = 3 = A$, y $C = 1$, de modo que la fórmula es válida. Cabe aclarar que nuestro argumento intuitivo puede hacerse más riguroso, de modo que se convierta en una verdadera demostración. Se puede verificar, sin mucha dificultad, llevando a cabo la reducción descripta partiendo por ejemplo de un dodecaedro: en primer lugar, hay que aplanarlo, quitándole una de sus caras y estirando la figura hueca que queda, como si se tratase de un coqueto centro de mesa compuesto de pentágonos. Luego, bastará con agregar dos diagonales a cada pentágono para obtener una red de triángulos, que se irán desvaneciendo uno a uno por medio de las operaciones 2 y 3, como se observa en el siguiente gráfico:

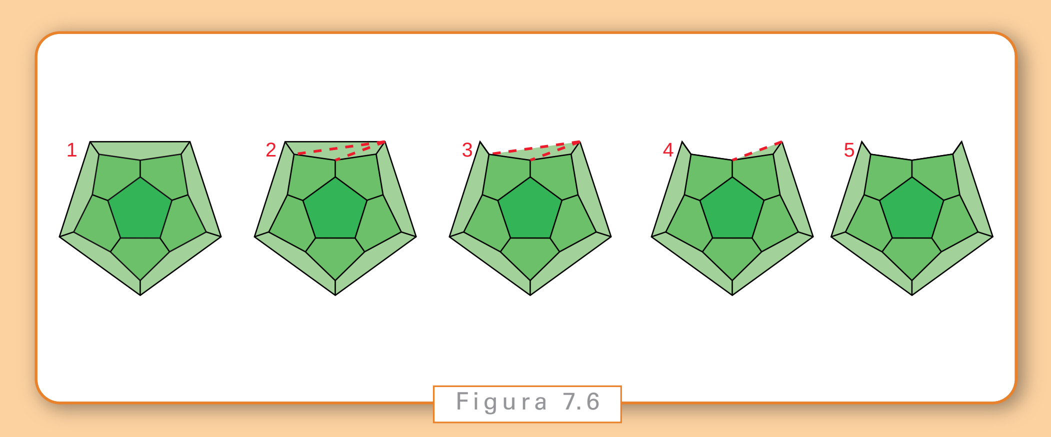


Figura 7.6

A modo de comentario final de esta sección, vale la pena observar que el valor 2 que aparece en la fórmula de Euler-Descartes puede verse directamente como una propiedad *de la esfera*, pues vale para cualquier subdivisión poligonal que se trace sobre ella. Se trata de un invariante topológico, que se denomina “característica”. La característica de una esfera (y de cualquier otra superficie equivalente a ella) es 2. Para otras superficies diferentes, dicho valor característico es distinto.

7.4. Los cinco platónicos

En esta sección brindaremos, tal como hemos anunciado, una demostración elemental de ese hecho geométrico que tanto cautivó a los griegos: existen solamente cinco poliedros simples regulares, vale decir, cuyas caras son polígonos regulares iguales. Nuestra herramienta principal va a ser topológica: la fórmula de Euler-Descartes.

En primer lugar, conviene efectuar una observación muy sencilla, que se desprende justamente de la regularidad de un poliedro: si el número de lados por cara es n, y el número (siempre el mismo) de aristas concurrentes en cada vértice es k, entonces vale

$$kV = 2A, \qquad nC = 2A.$$

Esto es así, en efecto, ya que cada arista tiene dos vértices, y es compartida por exactamente dos caras. La fórmula de Euler-Descartes se reescribe entonces de la siguiente manera:

$$\frac{2A}{k} + \frac{2A}{n} - A = 2$$

o, equivalentemente

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}.$$

Vamos a ver que k o n, al menos uno de ellos, tiene que ser igual a 3. En primer lugar, es evidente que $k, n \geq 3$, y si fueran ambos mayores se tendría entonces que $k, n \geq 4$. Resultaría entonces que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{k} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0,$$

lo que es absurdo.

Ahora, si $k = 3$, se obtiene que

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{3} + \frac{1}{n} - \frac{1}{2} = \frac{6-n}{6n},$$

de donde se concluye que $n < 6$. Los valores posibles son:

- $n = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro.
- $n = 4$ y $A = 12$, que corresponden al cubo.
- $n = 5$ y $A = 30$, que corresponden al dodecaedro.

Observemos ahora que, en la fórmula anterior, los roles de k y n se pueden intercambiar. Por eso, si planteamos ahora $n = 3$ obtenemos las siguientes posibilidades:

- $k = 3$ y $A = 6$, que corresponden al tetraedro;
- $k = 4$ y $A = 12$, que corresponden al octaedro;
- $k = 5$ y $A = 30$, que corresponden al icosaedro.

Claramente, el primer caso se repite, lo que hace un total de cinco poliedros. Quizás sea demasiado pronto para enamorarse, pero debemos reconocer que la demostración tiene su encanto...

7.5. Algunas actividades

La demostración de la sección previa es muy seductora, en especial porque da cuenta de un hecho sorprendente, que constituye uno de los pilares del misticismo platónico. Pero sin necesidad de ponernos tan místicos podemos ver, a modo de ejercicio, algunas otras propiedades geométricas que se deducen de la fórmula de Euler-Descartes. Como dice el matemático francés H. Lebesgue en su trabajo *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*, el número de propiedades que se puede obtener con el procedimiento que veremos es infinito; nos limitaremos a deducir apenas unos hechos básicos, tales como:

1. Todo poliedro simple contiene un triángulo o una tríada (es decir, un vértice con tres aristas concurrentes).
2. Todo poliedro simple tiene una cara con menos de 6 lados.

Se puede intentar una prueba, antes de continuar. En esencia, el razonamiento es muy similar al de la sección previa. Sin embargo, ahora no hay valores únicos de k y n; por eso, resulta conveniente denominar por ejemplo C_n al número de caras que tienen n lados, y V_k al número de vértices que tienen k aristas concurrentes. Esto tiene sentido obviamente para $k, n \geq 3$, y además es claro que los números C_n y V_k sólo pueden ser distintos de 0 para un número finito de valores de n y k. Por ejemplo, supongamos que el valor máximo de lados por cara es n, y el valor máximo de aristas concurrentes por vértice es k; se tiene entonces:

$$C = C_3 + C_4 + \ldots + C_n , \; V = V_3 + V_4 + \ldots + V_k .$$

Por otra parte, contando la cantidad total de caras y vértices, se deducen las siguientes fórmulas:

$$3C_3 + 4C_4 + \ldots + NC_n = 2A\,, \quad 3V_3 + 4V_4 + \ldots + KV_k = 2A\,.$$

Multipliquemos a los dos términos de la fórmula de Euler-Descartes por 4; de esta forma resulta:

$$4(C_3 + \ldots + C_n) + 4(V_3 + \ldots + V_k) - 4A = 8.$$

A su vez, escribiendo

$$4A = 2A + 2A = 3C_3 \ldots + NC_n + 3V_3 + \ldots + KV_k\,,$$

podemos reagrupar los términos de la igualdad anterior para obtener:

$$(4-3)C_3 + (4-4)C_4 + \ldots + (4-N)C_n + (4-3)V_3 + (4-4)V_4 + \ldots + (4-K)V_k = 8.$$

Finalmente, observemos que, en la última expresión, sólo resultan positivos los coeficientes correspondientes a C_3 y V_3, ambos iguales a 1: esto prueba que

$$C_3 + V_3 \geq 8.$$

Como consecuencia, hemos demostrado la primera de las afirmaciones. En verdad, hemos demostrado algo más: en todo poliedro simple el número total de triángulos y tríadas es *por lo menos* igual a 8.

Para ver la segunda propiedad, podemos multiplicar ahora a la igualdad de Euler-Descartes por 6, y escribir $6A = 2A + 4A$, de modo que

$$6(C_3 + \ldots + C_n) - 2A + 6(V_3 + \ldots + V_k) - 4A = 12.$$

La identidad que se obtiene ahora es

$$(6-3)C_3 + (6-4)C_4 + \ldots + (6-n)C_n + (6-6)V_3 + (6-8)V_4 + \ldots + (6-2k)V_k = 12.$$

En este nuevo caso, los únicos coeficientes positivos son los correspondientes a C_3, C_4 y C_5, y vale

$$3C_3 + 2C_4 + C_5 \geq 12.$$

Como antes, lo que se prueba es un enunciado algo más fuerte, más preciso que la afirmación original que pretendíamos demostrar: en todo poliedro simple, el número de caras de menos de 6 lados es como mínimo igual a 12.

A modo de ejercicio, se puede intentar probar el siguiente enunciado, concerniente a una clase especial de poliedros:

Ejercicio 1 **En un poliedro simple cuyas caras no contienen triángulos o cuadriláteros (es decir, $C_3 = C_4 = 0$) y todos sus vértices son tríadas (es decir, $V = V_3$), existe siempre algún pentágono que toca a otro pentágono, o bien a un hexágono.**

La demostración es algo más complicada, pero resulta de multiplicar a la fórmula de Euler-Descartes por 14, y escribir $14A = 4A + 10A$.

Capítulo 8

Tierra, Sol, Luna

Juan Pablo Pinasco

8.1. El problema

Estamos ahora en condiciones de resolver el problema planteado en la introducción:

Calcular las distancias al Sol y a la Luna, y sus tamaños.

En principio, los valores que estamos buscando son cuatro, como ya señalamos:

- **R, distancia entre el Sol y la Tierra.**
- **r, distancia entre la Luna y la Tierra.**
- **D, diámetro del Sol.**
- **d, diámetro de la Luna.**

Problema

Antes de resolver el problema, es importante saber distinguir el tipo de *datos* que necesitamos, y cómo calcularlos. Por ejemplo, supongamos que el Sol, la Tierra y la Luna forman un triángulo rectángulo, como en la figura 8.1

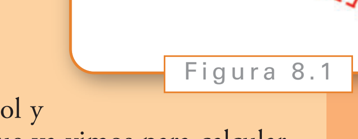


Figura 8.1

Llamemos aquí $R = \overline{ST}$ y $r = \overline{TL}$.

Ahora, si conocemos el ángulo a y la distancia $\overline{SL}$ entre el Sol y la Luna, podemos utilizar los argumentos trigonométricos que ya vimos para calcular las distancias buscadas:

$$sen(a) = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} = \frac{\overline{SL}}{\overline{ST}}$$

Entonces, conociendo a y $\overline{SL}$, calculamos el seno de a, y luego despejamos la distancia entre la Tierra y el Sol $\overline{ST}$:

$$\begin{aligned} R &= \overline{ST} \\ &= \frac{\overline{SL}}{sen(a)}. \end{aligned}$$

Ahora, conociendo $\overline{ST}$ podemos calcular la distancia entre la Tierra y la Luna, $\overline{TL}$:

$$\begin{aligned} cos(a) &= \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \\ &= \frac{\overline{TL}}{\overline{ST}} \end{aligned}$$

porque en el paso anterior hemos calculado $\overline{ST}$, y despejamos

$$\overline{TL} = cos(a) \cdot \overline{ST}.$$

Observemos que podemos escribir esta última ecuación como

$$r = cos(a) \cdot R.$$

Lamentablemente, para resolver de esta forma el problema de las distancias, estamos suponiendo que tenemos cierta información, es decir que conocemos tres *datos* importantes:

1. los puntos S, T, L forman un triángulo rectángulo,
2. conocemos el ángulo a,
3. conocemos la distancia $\overline{SL}$.

Sin embargo, seríamos deshonestos si terminamos el libro resolviendo el problema de esta manera. Si pudiéramos medir en forma directa, o con observaciones, la distancia entre el Sol y la Luna, seguramente podríamos medir entonces la distancia entre el Sol y la Tierra (y entre la Tierra y la Luna) sin necesidad de utilizar argumentos geométricos.

Necesitamos buscar otra manera de encarar el problema, y la solución debe estar dada en términos de datos a los que realmente tengamos acceso. En teoría, la solución anterior es perfecta; en la práctica, depende de conocer una distancia tan difícil de calcular como las que queremos averiguar.

Por otra parte, notemos que nos quedan por analizar los otros dos factores que utilizamos en esta solución del problema: la suposición de que el Sol, la Luna y la Tierra formen un triángulo rectángulo, y la posibilidad de conocer el ángulo a.

La Luna se ve muchas veces durante el día, aunque no siempre presenta la misma forma: va desde una estrecha cinta en forma de medialuna, hasta el disco completo de la luna llena. En

algunos casos, cerca de los cuartos crecientes y los menguantes, vemos iluminado exactamente un semicírculo: en ese momento, cuando vemos iluminada la mitad, la Luna se ubica en el vértice que corresponde al ángulo recto de un triángulo rectángulo (ver la figura anterior).

Es muy difícil determinar con precisión el momento en que exactamente la mitad de la Luna está iluminada, porque al ser esférica, y su superficie rugosa, no vemos exactamente una línea recta que separa la zona iluminada de la zona en sombras, pero es posible determinar ese momento con una aproximación muy buena. Desde ya, culpa de esto se cometen errores en la medición, pues tal vez el momento elegido para medir no corresponde exactamente al momento en que el Sol, la Luna y la Tierra forman un triángulo rectángulo.

Prolongando el borde donde comienza la región en sombras de la Luna hasta nuestra ubicación en la Tierra, obtenemos el cateto adyacente al ángulo *a*, y la hipotenusa es el segmento que une a la Tierra y el Sol. Ahora, necesitamos medir el ángulo *a*, y esto puede hacerse aunque con cierta dificultad, indiquemos brevemente cómo hacerlo.

Tenemos que determinar el ángulo que hace el cateto adyacente con la hipotenusa, es decir, la recta que une el punto donde estamos parados con el Sol. Como ya explicamos, es posible hallar el ángulo entre dos objetos que estamos viendo a la distancia (utilizando un teodolito, u otro instrumento similar). Pero aquí, el problema es que alinear esta recta imaginaria entre nuestros ojos y el Sol es peligroso, y nos puede costar la vista. Si se quiere hacer la medición, se puede intentar lo siguiente: en vez de "mirar" en dirección al Sol, conviene mirar en la dirección opuesta, lo cual no es tan difícil, ya que es la dirección de nuestra sombra. En lugar de medir el ángulo *a*, podemos tratar de medir su complemento, que debe ser 180°− *a* (como en la figura 8.2).

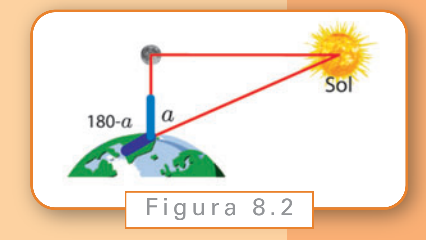


Figura 8.2

Para obtener una medición precisa hay que utilizar un radiotelescopio, o cámaras de rayos ultravioletas (pero cuidado, ¡no se debe mirar en la dirección del Sol!). Este ángulo, medido con la tecnología actual, resulta ser de 89,853°. Sin embargo, fue medido con métodos elementales por Aristarco en el siglo III a.C.; y el valor que calculó fue de 87°, que no está tan lejos del valor real, pero veremos que esos 2,853° e diferencia generan un gran error en los valores estimados finales. A él debemos también la idea de hacer las mediciones cuando *STL* forman un triángulo rectángulo.

Calcule $\frac{1}{cos(87°)}$, y $\frac{1}{cos(89{,}853°)}$. ¿Son muy diferentes? | **Ejercicio 1**

Observación: **repitámoslo otra vez, en caso de intentar medir el ángulo *a* procedan con mucha cautela. Recuerden que jamás se debe mirar en la dirección del Sol.**

En definitiva, la suposición de que *STL* forman un triángulo rectángulo resulta razonable, y también es posible medir el ángulo *a*. En cambio, no podemos medir la longitud de uno de los catetos, o de la hipotenusa, de manera directa. Es conveniente razonar de este modo con todos los datos que se introducen para resolver el problema, verificar si existe alguna forma de obtenerlos, o si es que han salido de la nada, como por arte de magia. En este último caso, debemos descartarlos.

8.2. Tamaños y distancias

El objetivo de la sección anterior fue tomar conciencia de que existen datos que podemos obtener en la práctica (a través de una medición) y otros que no. En esta sección vamos a enfocar otro aspecto del problema, establecer relaciones entre los valores que queremos calcular aunque no sepamos cuánto valen. Si bien los cuatro valores D, d, R y r caen dentro del tipo de datos a los que no podemos acceder en forma directa, la geometría nos permite despejar unos en función de los otros.

Por ejemplo, en la sección anterior vimos que

$$r = cos(a) \cdot R,$$

y como el ángulo a puede medirse, es suficiente averiguar una de las dos distancias para obtener la otra.

Con una calculadora obtenemos aproximadamente $cos(89{,}853) \approx 0{,}002565$, con lo que podemos despejar la distancia al Sol,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{0,002565} \cdot r \\ &\approx 389,86r, \end{aligned}$$

y por lo tanto la distancia entre la Tierra y el Sol es unas 390 veces la distancia entre la Tierra y la Luna.

¿Cómo aprovechar esta relación? ¿Cómo medir una de estas distancias? La respuesta, provisoria, pasa por estimar los diámetros que estamos buscando. ¿Nos sirve una regla común, graduada en centímetros y milímetros...? ¡En contra de todo lo que podamos imaginar, la respuesta es que sí!

Si una noche extendemos una regla con el brazo y “medimos” el diámetro que vemos de la Luna, sabemos que el tamaño real de la misma no son esos pocos milímetros que ocupa en la regla. Pero esta medición no es tan inútil como puede parecer, ya vimos en el capítulo dedicado a la geometría proyectiva que hay reglas precisas de cuánto y cómo debe achicarse una figura que está en un cuadro para que nos dé una impresión de estar a la distancia.

Pensemos, entonces, en hacer un sencillo experimento: intentar atrapar la Luna entre dos dedos. Antes, vamos a hacerlo con este libro. Déjelo en una mesa o en el piso, a un metro o dos de distancia, y separe el índice y el pulgar unos tres centímetros. Ahora, cerrando un ojo, y acercando la mano al (otro) ojo, trate de hacer coincidir el libro entre los dos dedos, como si lo estuviese sosteniendo entre ellos. Evidentemente, el libro no mide tres centímetros, pero se ve de ese tamaño si la mano está ubicada a unos diez o veinte centímetros de nuestra cara. Los resultados de triángulos semejantes que vimos

antes no nos permiten calcular el tamaño del libro ni la distancia a la cual lo dejamos, pero sí sabemos que se mantiene la siguiente proporción:

$$\frac{distancia\ al\ libro}{tamano\ del\ libro} = \frac{distancia\ a\ los\ dedos}{separacion\ de\ los\ dedos}.$$

Ejercicio 2

Realizar este experimento, separando los dedos unos tres centímetros, midiendo a qué distancia están los dedos de su ojo, y verifique que el cociente entre la distancia al libro y su tamaño es igual al cociente que calculó.

Podemos repetir este experimento con la Luna, y obtener así una relación entre el diámetro d de la Luna y la distancia r a la que está, el cociente r/d puede calcularse con un experimento similar (ver figura 8.3). Es decir, resulta que r/d es un cierto valor que sí puede calcularse, pero la precisión del valor que obtendremos dependerá del cuidado con el cual hagamos las mediciones. Se tiene, aproximadamente,

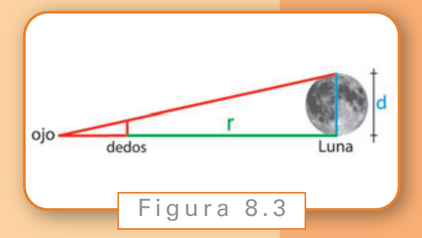


Figura 8.3

$$\frac{r}{d} \approx 110,$$

aunque, con seguridad, si lo intentamos nuestra aproximación será muy pobre. ¡Verifíquelo en una noche de luna llena!

Hay muchas formas de hacer esta medición del cociente r/d. Otra, es determinando el diámetro angular. Veámosla porque emplea una idea que utilizaremos más adelante.

8.2.1. Cálculo del diámetro angular de la Luna

Para calcular el diámetro angular de la Luna necesitamos conocer su velocidad: sabemos que el ciclo lunar tarda 29,5 días. Este tiempo se puede medir entre dos lunas llenas consecutivas, si bien hay que repetir la medición a lo largo de algunos meses para obtener esta aproximación (por ejemplo, si suponemos que el período es de 29 días, veremos que cada dos meses se atrasa un día). Como la Luna da una vuelta completa alrededor de la Tierra en ese tiempo, sabemos que recorre 360°en unas 708 horas. Esto nos permite calcular su velocidad angular:

$$\begin{aligned} velocidad\ angular &= \frac{360°}{708h} \\ &\approx 0,51°/h. \end{aligned}$$

Luego, dado que conocemos la velocidad angular, si podemos calcular cuánto tarda en recorrer su propia distancia, tendremos una estimación de su diámetro angular, ya que conocemos su velocidad angular. Una forma de calcularlo es observar cuando la Luna pasa

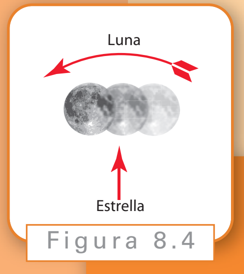


Figura 8.4

Para realizar este cálculo sólo deben determinarse la duración del ciclo lunar, y el tiempo que tarda la Luna en recorrer su propio diámetro. Puede hacerse de otras formas, por ejemplo, el tiempo en que tarda en ocultarse detrás de un edificio, o un árbol.

por delante de una estrella (en una noche de luna llena,), tomando el tiempo que la estrella permanece oculta, y calculando así la distancia angular que recorre; esta distancia angular es igual a su diámetro angular, ver la Figura 8.4.

El tiempo que tarda es prácticamente una hora, apenas un poco más de una hora, con lo cual el diámetro angular es de 0,52°, ó 30'.

Ejercicio 3 | **Intentar hacer esa medición en una noche de luna llena, y verifique que el tiempo es de aproximadamente una hora.**

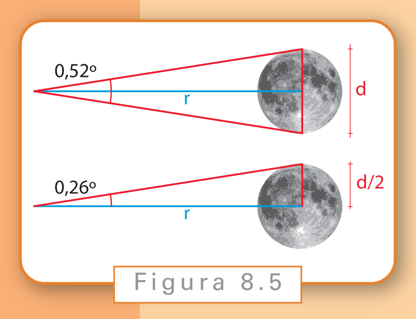


Figura 8.5

Conociendo el diámetro angular, obtenemos la relación entre *r* y *d* utilizando un argumento trigonométrico. Observemos los triángulos de la figura 8.5.

El primero es un triángulo isósceles, con la superficie de la Luna como base; el segundo es un triángulo rectángulo que obtenemos bisecando el ángulo, cuyos catetos son *r* y *d*/2. En definitiva,

$$\begin{aligned} tan(b/2) &= \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente} \\ &= \frac{d/2}{r} \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{r} \end{aligned}$$

Luego, utilizando ahora una calculadora, podemos despejar

$$\begin{aligned} \frac{r}{d} &= \frac{1}{2tan(b/2)} \\ &= \frac{1}{0,009075} \\ &\approx 110. \end{aligned}$$

En definitiva, aunque no podemos medir ni *r* ni *d*, sí podemos calcular su cociente *r*/*d* (y de dos formas diferentes). Puede parecernos poco este logro, pero observemos que hemos eliminado otra variable de nuestro problema: si sabemos calcular *r*, tenemos resuelto cuánto vale *d* (o, a la inversa, si podemos calcular *d*, averiguamos *r*). Y, en ambos casos, podemos calcular luego *D*.

8.2.2. Diámetro angular del Sol

A primera vista, nos puede parecer que podemos repetir el experimento con el Sol y obtener de la misma forma un valor para el cociente *R*/*D*... ¡NO! Si lo intentamos, corremos el riesgo de perder la visión del ojo que dejamos abierto.

No siempre el método que sirve para medir un objeto, conviene para medir otro objeto distinto. Debemos buscar otra manera de obtener información sobre *R* y *D*, sin mirar directamente al Sol, y en este caso, utilizaremos los eclipses de sol. Puede resultar paradójico que para obtener alguna información del tamaño del Sol, utilicemos precisamente el momento en que no está visible.

Si observamos imágenes de eclipses solares (figura 8.6), veremos que la Luna se superpone casi perfectamente sobre el Sol.

Esta situación se puede representar en un diagrama como el de la figura 8.7: y, por semejanza de triángulos, tenemos:

$$\frac{R}{D} \approx \frac{r}{d} \approx 110.$$

Esta superposición no es perfecta, y puede verse un pequeño reborde circular del Sol asomando alrededor de la Luna. Por este motivo, en realidad el cociente R/D es un valor cercano a 109. Pero la diferencia es despreciable a la hora de estimar las distancias y los tamaños que nos interesan.

En definitiva, también el diámetro angular del Sol es de aproximadamente 30' (ó 0,5°).

Hemos obtenido entonces otra relación, ahora para nuestras incógnitas *R* y *D*: basta conocer una de las dos, y obtenemos la otra. Es la misma relación que hay entre *r* y d, con lo cual alcanza con conocer los radios para saber las distancias (o conocer las distancias para calcular los radios).

Recapitulando, si conociéramos, por ejemplo, la distancia al Sol *R*, obtenemos despejando el diámetro solar

$$D = \frac{R}{109}.$$

Ahora, gracias a que conocemos el ángulo *a* = 89, 853°, podemos calcular el diámetro lunar,

$$\begin{aligned} d &= cos(89,853) \cdot D \\ &= \frac{cos(89,853) \cdot R}{110}, \end{aligned}$$



Figura 8.6

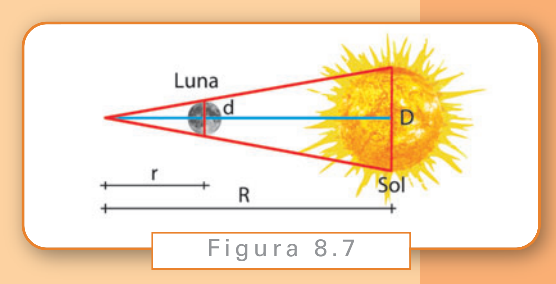


Figura 8.7

y tendríamos también la distancia a la Luna

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= \frac{110 \cdot cos(89,853) \cdot R}{110} \\ &= cos(89,853) \cdot R. \end{aligned}$$

(recordemos que $cos(89{,}853) \approx 1/390$).

Ejercicio 4 | **Verifique que si conoce alguno de los valores D, r o d, también es suficiente para averiguar los restantes.**

Antes de pasar a la siguiente sección, conviene meditar un momento la siguiente cuestión: ¿Qué convendrá intentar averiguar, la distancia al Sol o a la Luna? ¿O tal vez el diámetro del Sol, o el de la Luna? Y, cualquiera sea la respuesta que elija, ¿Cómo podría intentar calcularlos?

8.3. La sombra de la Tierra

Respondamos ahora las preguntas que dejamos al final de la sección anterior: podemos calcular un valor cualquiera de lo que nos interesa, ya sean los diámetros o las distancias, sean del Sol o la Luna. Para cualquiera de los dos, debemos considerar la sombra que proyecta la Tierra. Hay un argumento muy ingenioso que permite calcular el diámetro lunar de manera sencilla, y luego obtener de éste la distancia. Vamos a describir las dos formas de hacerlo, porque son de gran interés histórico.

Una, fue ideada por Aristarco de Samos (310 - 230 a.C.); la otra, por Hiparco (190 - 120 a.C.).

En ambos casos, el truco para obtener más información es pensar en un eclipse lunar. Esencialmente, en este caso es la Tierra la que se interpone entre la Luna y el Sol, con lo cual la Luna queda fuera de nuestra vista durante cierto tiempo. Ahora podemos hacer un nuevo argumento de semejanza de triángulos, con el cual despejar el diámetro lunar en función del diámetro terrestre.

8.3.1. El argumento de Aristarco

La idea de Aristarco es sencilla, y depende de estimar el tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras de la Tierra durante un eclipse, prácticamente la misma idea que utilizamos para calcular el diámetro angular de la Luna.

Durante un eclipse de Luna, la Tierra proyecta un cono de sombras, y entre el momento en el cual comienza a entrar la Luna y el momento que sale, pasan poco más de tres horas y media. En la figura 8.8 hemos representado además la distancia x, que sumada

a r nos da la longitud total del cono de sombras terrestre. Hemos indicado también la distancia y que recorre la Luna durante el eclipse:

Si bien no conocemos x, sabemos que, aproximadamente, $y = 2{,}6\,d$ ya que cada hora la Luna recorre una distancia igual a su diámetro angular y tarda 3,6 h en atravesarlo.

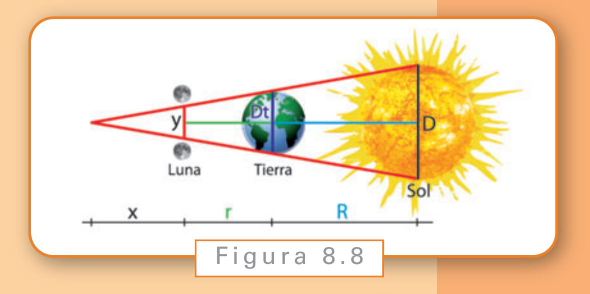


Figura 8.8

Podríamos preguntarnos por qué esta distancia es 2,6d y no 3,6d, si tarda en realidad 3,6 h. La respuesta está en cómo estamos midiendo la duración del eclipse: desde que la Luna entra en el cono de sombras, hasta que sale completamente. El punto del borde que ingresa primero en las sombras tarda 2,6 horas en salir, pero debe transcurrir una hora más hasta que el resto de la Luna sale de las sombras.

Por semejanza de triángulos, tenemos tres relaciones entre estas longitudes:

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{Dt}{x+r} = \frac{D}{x+r+R}$$

Antes de despejar, recordemos que

$$D = 390d$$
$$R = 110D$$
$$R = 110 \cdot 390d$$
$$R = 42.900d$$
$$r = 110d,$$

y que el radio terrestre es de 6.378 km, con lo cual el diámetro es $Dt = 12.756$ km. Reemplacemos para eliminar r y las variables que dependen del Sol (podríamos haber eliminado tres cualesquiera sin dificultades):

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{12.756}{x+110d} = \frac{390d}{x+110d+42.900d}$$

Por comodidad, omitiremos las unidades durante la cuenta. Igualando la primera y la tercera,

$$\frac{2,6d}{x} = \frac{390d}{x+43.010d}$$

despejamos el valor de x:

$$\begin{aligned}
(2,6d)(x+43.010d) &= 390dx \\
2,6dx+111.826d^2 &= 390dx \\
2,6x+111.826d &= 390x \\
387,4x &= 111.826 \\
x &= 288,6d
\end{aligned}$$

Ahora, igualando las dos primeras expresiones, tras reemplazar x,

$$\begin{aligned}
\frac{2,6d}{288,6d} &= \frac{12.756}{288,6d+110d} \\
\frac{2,6}{288,6} &= \frac{12.756}{398,6d} \\
2,6 \quad 398,6d &= 12.756 \quad 288,6 \\
d &= \frac{12.756 \cdot 288,6}{2,6 \cdot 398,6} \\
d &= 3552,2...
\end{aligned}$$

Conociendo d, calculamos los otros valores:

$$\begin{aligned}
D &= 390 \cdot d \\
&= 1.385.358 \ km \\
r &= 110 \cdot d \\
&= 390.742 \ km \\
R &= 110 \cdot D \\
&= 152.389.380 \ km
\end{aligned}$$

8.3.2. El argumento de Hiparco

Un siglo después de la medición de Aristarco (que dio valores muy inferiores a los reales, dado que su error en la medición de a lo llevó a la relación $D = 20d$), Hiparco dio un argumento diferente para calcular el tamaño de la Luna, también aprovechando un eclipse. Veremos que su idea es mucho más geométrica.



Figura 8.9

La clave aquí fue considerar la sombra que hace la Tierra sobre la Luna, observe la figura 8.9.

Puede resultar difícil de creer, pero esa imagen alcanza para estimar el radio lunar en función del radio terrestre gráficamente, como se indica en la figura 8.10.

Trazando dos cuerdas en el borde de cada círculo (en el borde de la Luna, y en el contorno de la sombra de la Tierra), podemos determinar el centro de cada círculo (ver el final del capítulo 3). Midiendo ambas distancias, podemos ver que el radio de la sombra terrestre es $3,7$ veces mayor que el radio de la imagen que vemos de la Luna.

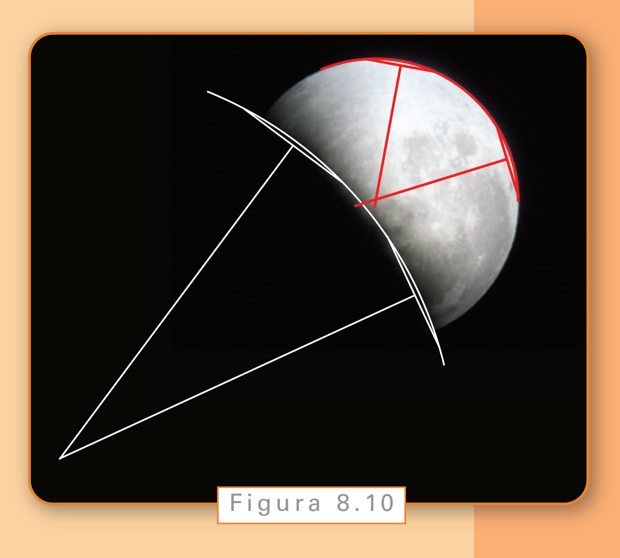


Figura 8.10

Ahora, dado que las proyecciones mantienen las proporciones de las imágenes entre ellas, el radio terrestre será $3,7$ veces el radio lunar, y la misma proporción se mantiene para los diámetros:

$$Dt = 3,7d,$$

con lo cual, dado que conocemos el diámetro terrestre, obtenemos

$$\begin{aligned} d &= \frac{12.756}{3,7} \\ &= 3447,5... \end{aligned}$$

que es un valor cercano al que obtuvimos antes, y mucho más exacto. Con este valor, obtenemos

$$\begin{aligned} r &= 110 \cdot d \\ &= 379.225 \\ D &= 390 \cdot d \\ &= 1.344.525 \\ R &= 110 \cdot D \\ &= 147.897.750 \end{aligned}$$

8.4. Comentarios finales

Con herramientas geométricas elementales hemos calculado el radio lunar: sólo utilizamos el gráfico de la sombra terrestre sobre la Luna.

Para calcular la distancia a la Luna es suficiente armar un triángulo semejante, "atrapando" la Luna entre dos dedos y midiendo la separación de los mismos y la distancia de la mano a nuestra cara. O, mejor aún, medimos el tiempo que tarda en dar una vuelta completa alrededor de la Tierra, y el que tarda en atravesar un punto fijo para calcular su diámetro angular. Conociendo el cociente r/d, y d, averiguamos r.

Y también podemos calcular *d* a partir del tiempo que tarda la Luna en atravesar el cono de sombras durante un eclipse lunar.

Para conocer el diámetro solar, sólo necesitamos saber que el Sol y la Luna se ven del mismo tamaño desde la Tierra: para esto utilizamos que en un eclipse solar la Luna oculta casi perfectamente al Sol.

Si somos capaces, además, de medir el ángulo *a* -la separación con que vemos a la Luna y el Sol-, podemos calcular también la distancia al Sol.

Sólo este último paso es difícil de realizar, todos los demás son sencillos y no se necesita más que un reloj y una regla. Vamos a dejar, como problema abierto para discutir, si la distancia al Sol puede averiguarse sin necesidad de conocer este ángulo a. Desde ya, hay que detallar cómo se haría cualquier medición, evitando cualquier procedimiento que requiera mirar en dirección al Sol.

Planteamos, en la introducción, una serie de hipótesis sobre nuestro problema. En especial, asumimos que las órbitas lunar y terrestre eran circulares, con lo cual las distancias *r* y *R* estaban bien definidas como los radios de estas órbitas.

Pero sabemos desde principios del siglo XVII, gracias Kepler, que las órbitas son en realidad elípticas, con lo cual las distancia varía según la época del año. En el caso de la Luna, las distancias en el afelio (el momento en que la Luna está más lejos de la Tierra) y el perihelio (el momento en que está más cerca) son 384.400 km y 363.300 km respectivamente (nuestra aproximación dió 379.225 km). Para el Sol, tenemos 147.100.000 km y 152.100.000 km (obtuvimos 147.897.750). Como puede verse, la aproximación que hemos obtenido es muy buena. Mejorarla, ya no depende de la geometría, sino de la tecnología para mejorar las mediciones.

Solución de los Ejercicios

Capítulo 1

Ejercicio 1
Una distancia de cuatro años-luz es aquella que recorre la luz viajando durante cuatro años. Como La velocidad de la luz es, aproximadamente, 300.000 km/s, tenemos que ver cuántos segundos hay en cuatro años y multiplicarlos por 300.000 km/s. Para averiguar esto, sólo debemos efectuar los siguientes cálculos:

$$\begin{aligned} un\ minuto &\rightarrow 60s \\ una\ hora &\rightarrow 60 minutos = 60 \cdot 60.s = 3.600s \\ un\ dia &\rightarrow 24h = 24 \cdot 3.600s \\ un\ año &\rightarrow 365 días = 365 \cdot 24 \cdot 3.600s \end{aligned}$$

La distancia buscada es de $300.000 \cdot 4 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600\ km = 3{,}78432 \times 10^{13}\ km$.

Ejercicio 2
Una letra N.

Ejercicio 3
Si los ángulos de la base midieran más de dos rectos, la prolongación de los dos lados del triángulo no podrían cortarse.

Ejercicio 4
Observemos que sólo podemos conectar dos vértices entre sí. Al hacerlo, descomponemos la figura en dos triángulos, y los ángulos interiores de cada uno suman 180°.

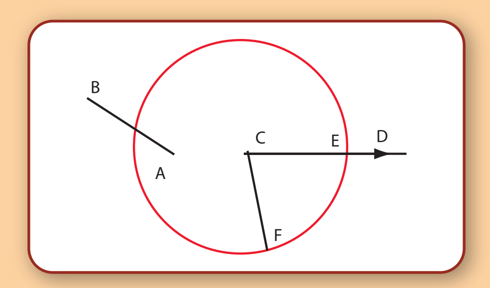
Capítulo 2

Ejercicio 1

Observemos que *DE* es congruente con *DF* por ser radios del círculo centrado en *D*. Como *DA* es congruente a *DC* (es un triángulo equilátero), resultan congruentes *AE* y *CF*. Pero *AB* y *AE* son congruentes, pues son radios del círculo que trazamos con centro en *A*; y por lo tanto, *CF* y *AB* son congruentes.

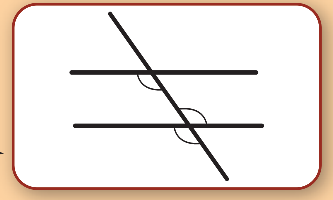
Ejercicio 2

Por la construcción anterior, sabemos que podemos obtener un segmento *CF* congruente al *AB*, no necesariamente en la recta dada. Ahora, con centro en *C* y radio *CF*, trazamos un nuevo círculo, y buscamos su intersección *E* con la recta *CD*. El segmento *CE* es el buscado.



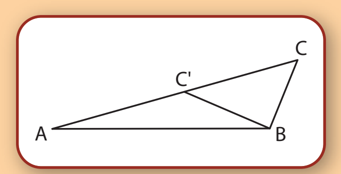
Ejercicio 3

No siempre serán congruentes. En la figura, si las hipotenusas son paralelas, cada cateto forma ángulos congruentes al cortarlas (se deduce de los resultados sobre alternos internos entre paralelas, y para un ángulo externo se utiliza que son opuestos por el vértice, ver la figura: →



Ejercicio 4

No siempre serán congruentes. Observe la siguiente figura, donde los triángulos *ABC* y *ABC* no son congruentes, pero comparten el ángulo en *A*, comparten el lado *AB*, y son congruentes los lados *BC* y *BC* .



Ejercicio 5

La respuesta es que sí, pues si tienen dos ángulos congruentes, el tercero también lo será. Ahora, por los resultados de semejanza de triángulos, ambos son semejantes, pero como tienen un lado congruente, resultan congruentes.

Ejercicio 6

Tracemos dos cuerdas distintas en el arco, y tracemos sus bisectrices. Como ambas pasan por el centro del círculo, éste estará en el punto donde se cortan.

Capítulo 3

Ejercicio 1

Como $sen(30°) = 0,5$ y $sen^2(30°) + cos^2(30°) = 1$, debe ser

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + cos^2(30°) = 1$$

y, despejando,

$$\begin{aligned} cos(30°) &= \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Ejercicio 2

Sí. La construcción es similar a la que hicimos para obtener un triángulo equilátero. Se toma un punto de la circunferencia, y con éste como centro se traza un nuevo círculo de igual radio que el anterior.

Como el triángulo ABC es equilátero, sus tres ángulos son iguales y miden 60°. Repetimos el proceso a partir del punto B y obtenemos un nuevo triángulo. Cada triángulo de éstos divide el círculo en seis sectores iguales.

Ejercicio 3

Para resolver este ejercicio recomendamos que: el equivalente a 360° es 2π radianes. Un ángulo llano tiene 180°, equivalentemente, π radianes; y un ángulo recto, $\pi/2$ radianes. Como π es un número irracional, no tenemos una expresión exacta para 1°, que en radianes es

$$1° = 1° \frac{2\pi \, rad}{360°} \approx 0,01745 \, rad.$$

A la inversa, podemos expresar en grados a cuanto equivale un radián:

$$1 \, rad = 1 rad \frac{360°}{2\pi \, rad} \approx 57,2958°.$$

Entonces, como $1° \approx 0,01745 \; rad$, tenemos que, en general,

$$x^\circ = x \cdot 1^\circ \approx x \cdot 0,01745\, rad,$$

con lo cual 30° ≈ 0, 5235 *rad* y 45° ≈ 0, 78525 *rad*.

Ejercicio 4

Como 1 *rad* ≈ 57,2958°, tenemos que, en general,

$$y\, rad = y \cdot 1\, rad \approx y \cdot 57,2958^\circ,$$

con lo cual $\pi/3$ *rad* = 60° y 1, 5 *rad* ≈ 85, 9437°.

Ejercicio 5

Tenemos

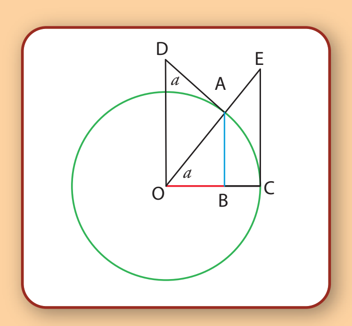
$$cos(a) = \frac{CA}{H} \quad \text{entonces} \quad sec(a) = \frac{H}{CA} = \frac{1}{cos(a)}$$

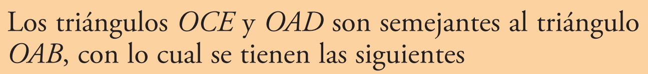
$$sen(a) = \frac{CO}{H} \quad \text{entonces} \quad cosec(a) = \frac{H}{CO} = \frac{1}{sen(a)}$$

$$tg(a) = \frac{CO}{CA} \quad \text{entonces} \quad cotg(a) = \frac{CA}{CO} = \frac{1}{tg(a)}$$

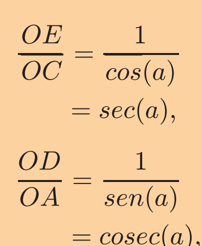
Ejercicio 6

Representemos en la circunferencia trigonométrica el ángulo *a*, y tenemos $1 = \overline{OA}$, $cos(a) = \overline{OB}$, $sen(a) = \overline{AB}$, y $tg(a) = \overline{CE}$. Ahora, trazamos la perpendicular a $\overline{OB}$ por el punto *O*, hasta su intersección a la perpendicular a *OA* por el punto *A*, y llamemos *D* a ese punto. Prolonguemos, también, el radio *OA* hasta el punto *E*.





Los triángulos *OCE* y *OAD* son semejantes al triángulo *OAB*, con lo cual se tienen las siguientes



$$\frac{OE}{OC} = \frac{1}{cos(a)} = sec(a),$$

$$\frac{OD}{OA} = \frac{1}{sen(a)} = cosec(a),$$

$$\frac{OA}{CE} = \frac{cos(a)}{sen(a)}$$
$$= \frac{1}{tg(a)},$$

pues $\overline{OC} = \overline{OA} = 1$.

Ejercicio 7

Observando la figura 3.10, vemos que en el segundo cuadrante se forma un triángulo rectángulo, y uno de sus ángulos mide $\pi - a$. Como su hipotenusa mide 1, y su cateto opuesto mide $y = sen(\pi - a)$, tenemos la primera igualdad. Para la segunda, como $x < 0$, tenemos que el cateto adyacente mide $-x$, con lo cual $cos(a) = -x = -cos(\pi - a)$.

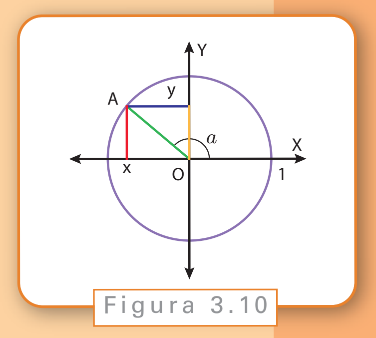


Figura 3.10

Ejercicio 8

En la figura 3.12 (pág. 57), observemos que

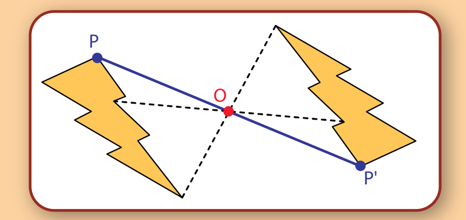
$$\frac{\text{sen}(a)}{x} = \frac{sen(b)}{y},$$

y despejando, se tiene la primer igualdad. La otra se obtiene trazando cada una de las perpendiculares a los otros lados. En el caso en que uno de los ángulos del triángulo sea mayor que un ángulo recto, se resuelve de la misma forma, dibujando la perpendicular hasta la prolongación del lado correspondiente.

Capítulo 4

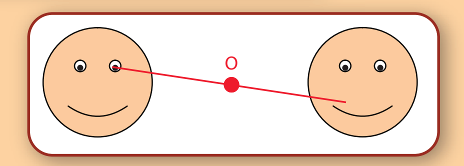
Ejercicio 1

El punto simétrico es P'. Para encontrarlo, trazamos la recta que paso por P y por O, y buscamos el punto P' tal que PO = OP'.



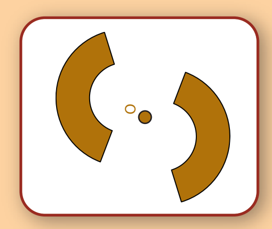
Ejercicio 2

a) Estas figuras no son simétricas con respecto a O. Por ejemplo, vemos que la imagen



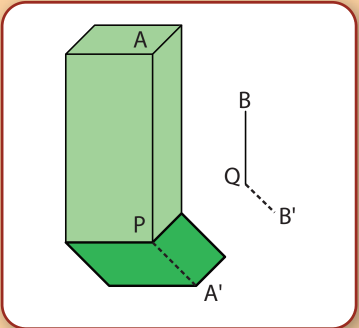
del centro del ojo, no es del centro del ojo de la figura de la izquierda.

b) Estas figuras sí son simétricas.



Ejercicio 7

Para poder calcular la altura, podemos tomar considerar el punto A del edificio y determinar su sombra, siguiendo el contorno de la sombra. La sombra es el punto A'.

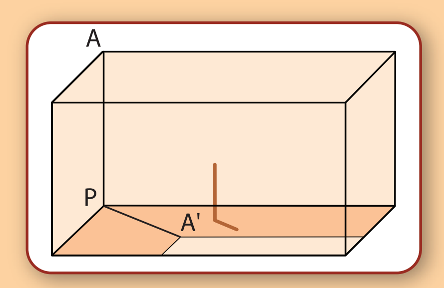


Ahora buscamos cuál es el punto que se encuentra sobre el piso, justo debajo de A. Este punto se llama la "proyección ortogonal" de A sobre el plano del piso, porque el segmento AP es ortogonal (o perpendicular) al plano del piso.

Luego tomamos un poste BQ del que sepamos la altura, medimos la sombra y con estos datos podemos calcular la longitud de AP, que es la altura del edificio.

Ejercicio 8

En este caso, el punto más fácil para calcular la sombra es el punto A.



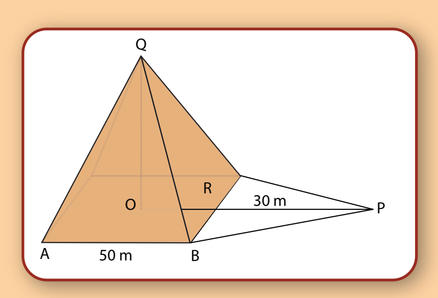
La sombra de A es el punto A' y la proyección de A es el punto P.

Midiendo la longitud de A'P podemos calcular la altura de la pared como antes.

Ejercicio 9

En este caso, no podemos medir la longitud de PO. Pero sabemos que

$$PO = PR + RO.$$



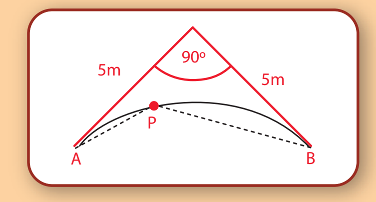
PR podemos medirlo. En este caso mide 30 m.

Para calcular la longitud de RO observamos que,

como O es el centro del cuadrado que forma la base de la pirámide, RO es igual a la mitad de la longitud del lado AB. Por lo tanto RO mide 25m y PO mide 55m. Con ese dato, ya podemos calcular la altura. OQ.

Ejercicio 10

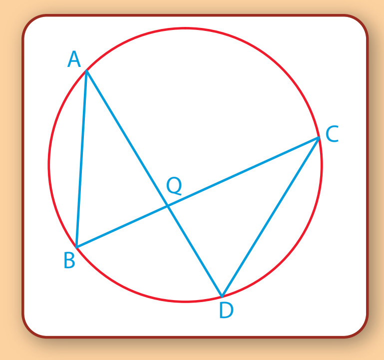
Si el perro está parado en el punto P, podrá ver todo el mural si el ángulo APB es menor o igual que 240º. Por lo tanto, para encontrar la región, trazamos el arco capaz de 240º y desde cualquier punto fuera de la región comprendida entre este arco y las dos paredes, el perro podrá ver todo el mural.



Ejercicio 11

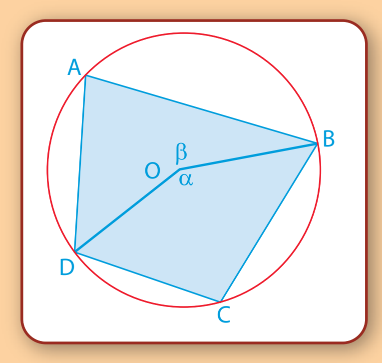
Los ángulos BAD y BCD se encuentran inscriptos en el arco BD. Por lo tanto son congruentes. Análogamente, los arcos ABC y ADC son congruentes.

Concluimos que los triángulos AQB y CQD son semejantes, siendo C el correspondiente de A y D el correspondiente de B.



Ejercicio 12

Como DAB = 80º, α = 2 x 80º = 160º, por ser el ángulo central correspondiente. Luego β = 360º - 160º = 200º. Obtenemos que DCB = 200º / 2 = 100º.



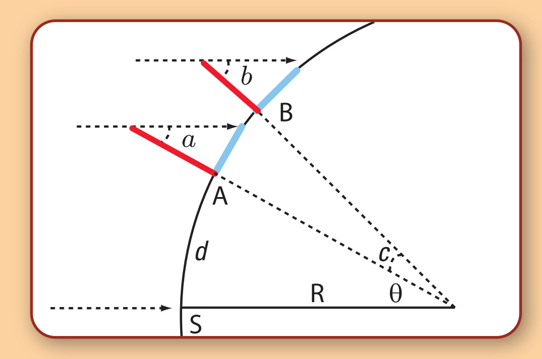
Ejercicio 13

La cuerda que pasa por los puntos donde entró y salió de la circunferencia señala la dirección Este-Oeste. La dirección Norte-Sur es la perpendicular a la cuerda.

Ejercicio 14

Podemos calcular el radio, y no hace falta una fecha especial. Observemos la siguiente figura:

Si A y B son las ciudades, podemos calcular el ángulo c a partir de los ángulos a y b, ya que utilizando el mismo argumento de antes, tenemos que $c = b - a$. Sabiendo la distancia entre A y B, y conociendo el ángulo c, el resto se deduce como antes.



Capítulo 5

Ejercicio 1

Basta recordar que por 3 puntos no alineados del espacio pasa un único plano, mientras hay una cantidad infinita de planos que pasan por una recta dada.

Ejercicio 2

Como el radio terrestre es aproximadamente R = 6.378 km, la distancia entre los dos polos vale $R\pi$ = 20.037 km, y la distancia entre el Polo Norte y una ciudad cualquiera ubicada sobre el Ecuador $R\pi/2$ = 10.019 km.

Ejercicio 3

Llamemos O al centro de la esfera. Sea M' la proyección ortogonal de M sobre el plano xy (el punto donde la recta perpendicular al plano xy que pasa por M corta el plano xy), con lo cual el triángulo OMM' tiene un ángulo recto en M'. Luego, la coordenada z de M, es decir la longitud del lado MM' de este triángulo, es

$$z = MM' = OM\text{sen}\theta$$

$$z = R\text{sen}\theta.$$

Para encontrar x e y introducimos la proyección ortogonal M'' de M' sobre el eje x (el punto donde la recta perpendicular al eje x que pasa por el punto M'' corta al eje x). El triángulo $OM'M''$ es rectángulo en M'', y tenemos

$$x = OM'' \qquad\qquad y = M''M'$$

y

$$x = OM'\cos\varphi \qquad\qquad y = OM'\text{sen}\varphi.$$

Volviendo al triángulo OMM' vemos que

$$OM' = OM\cos\theta$$

$$= R\cos\theta.$$

Luego,

$$x = R\cos\theta\cos\varphi \quad \text{y} \quad y = R\cos\theta \operatorname{sen}\varphi.$$

Ejercicio 4

Aplicando la fórmula en *AB'C*, triángulo rectángulo en *C*, obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen}(\pi - c)}{\operatorname{sen}(\pi - \hat{C})} = \frac{\operatorname{sen}(\pi - a)}{\operatorname{sen}(\pi - \hat{A})},$$

$$\cos(\pi - c) = \cos(\pi - a)\cos(b).$$

Como $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, llegamos a

$$\frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen}\hat{C}} = \frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen}\hat{A}},$$

$$\cos c = \cos a\cos b = \cos a\cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b\cos\hat{C}.$$

Ejercicio 5

Introduzcamos el punto *A'* antipodal de *A*. Como $d(C,A') = d(A,A') - d(C,A) = \pi - b < \pi/2$ (pues suponemos que $b > \pi/2$), podemos aplicar las relaciones fundamentales en el triángulo *CBA'* rectángulo en *C* de la misma manera que en el ejercicio anterior para obtenerlas en *ABC*.

Ejercicio 6

Lo probaremos primero en el caso $a, b < \pi/2$. Usando las relaciones trigonométricas que probamos al principio, obtenemos

$$\operatorname{sen} b = \frac{ED}{OD}, \quad \operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \qquad \cot\hat{A} = \frac{\cos\hat{A}}{\operatorname{sen}\hat{A}}$$

$$\text{y}$$

$$\operatorname{tg} a = \frac{BD}{OD}, \qquad \cot\hat{A} = \frac{DE}{BD}.$$

Luego

$$\operatorname{sen} b = \frac{ED}{OD} = \frac{BD}{OD}\frac{DE}{BD}$$

$$\operatorname{sen} b = \operatorname{tg} a\cot\hat{A}.$$

Después extendemos este resultado al caso $a, b > \pi/2$ de la misma manera que en los dos ejercicios anteriores usando $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$ y $\cos(\pi - x) = -\cos x$ que implican $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ y $\cot(\pi - x) = -\cot x$.

Ejercicio 7

Como suponemos a, b y c chicos podemos hacer las siguientes aproximaciones:

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}, \quad \cos(b) \approx 1 - \frac{b^2}{2}, \quad \cos(c) \approx 1 - \frac{c^2}{2},$$

y

$$\operatorname{sen}(b) \approx b, \quad \operatorname{sen}(c) \approx c.$$

Entonces podemos reescribir la primera relación fundamental

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \operatorname{sen}(b)\operatorname{sen}(c)\cos(\hat{A})$$

como

$$1 - \frac{a^2}{2} \approx \left(1 - \frac{b^2}{2}\right)\left(1 - \frac{c^2}{2}\right) + bc\cos(\hat{A}).$$

Simplificamos y obtenemos

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A}) - \frac{b^2c^2}{2}.$$

Como b^2c^2 es mucho más chico que b^2, c^2 y bc, lo podemos olvidar y nos queda

$$a^2 \approx b^2 + c^2 - 2bc\cos(\hat{A})$$

por a, b y c chicos.

Ejercicio 8

Según el teorema,

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = \frac{\acute{a}rea(ABC)}{R^2}.$$

A medida que el radio R de la esfera aumenta, el miembro de derecha se acerca más y más a 0. Luego si consideramos el plano como una esfera de radio infinito obtenemos

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi = 0.$$

Ejercicio 9
Llamemos $A_1, A_2, ..., A_n$ los n vertices de P_n (recorridos en el sentido de las agujas del reloj), y consideremos los $n-2$ triángulos $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_4A_5$, ..., $A_1A_{n-1}A_n$. El área de P_n es la suma de las áreas de estos triángulos. Haciendo la suma

$$area(A_1A_2A_3) = (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 - \pi)R^2$$

$$+area(A_1A_3A_4) = (\hat{A}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}_4 - \pi)R^2$$

$$+area(A_1A_4A_5) = (\hat{A}_1 + \hat{A}_4 + \hat{A}_5 - \pi)R^2$$

$$+\dots$$

$$+area(A_1A_{n-1}A_n) = (\hat{A}_1 + \hat{A}_{n-1} + \hat{A}_n - \pi)R^2$$

(ojo que el $\hat{A}_1$ de la 1era línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_2A_3$, mientras el $\hat{A}_1$ de la 2nda línea es el ángulo del vértice A_1 en el triángulo $A_1A_3A_4$ ..., y que la suma de todos estos $\hat{A}_1$ da el $\hat{A}_1$ de P_n - idem por $\hat{A}_2, \dots, \hat{A}_n$), obtenemos

$$area(P_n) = area(A_1A_2A_3) + \cdots + area(A_1A_{n-1}A_n)$$

$$= (\hat{A}_1 + \cdots + \hat{A}_n - (n-2)\pi)R^2.$$

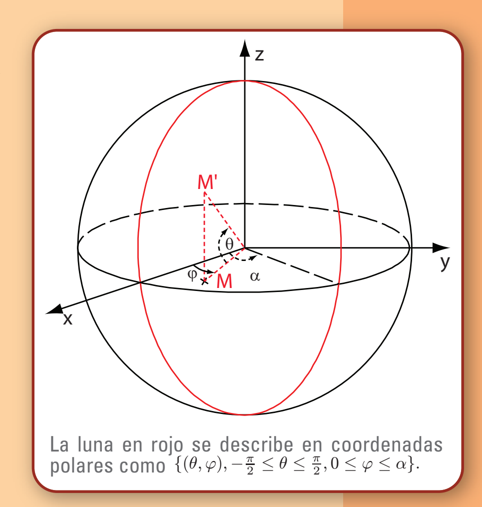
Ejercicio 10
Sea una luna cualquiera de ángulo α. Para describirla en coordenadas polares consideremos la figura 1. Vemos que la luna es el conjunto

$$\left\{(\theta, \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \alpha\right\}.$$

Luego su área vale

$$R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\alpha} \cos\theta \, d\theta d\varphi = R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \, d\theta \int_0^{\alpha} d\varphi$$

$$= 2R^2\alpha.$$



La luna en rojo se describe en coordenadas polares como $\{(\theta, \varphi), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \varphi \leq \alpha\}$.

Ejercicio 11
Por construcción la imagen de una arista es la intersección con la esfera del único plano que pasa por el centro de la esfera y esta arista. Recordando que por definición un círculo máximo es la intersección de la esfera con un plano que pasa por el centro de la esfera, obtenemos que la imagen de una arista es una porción de círculo máximo.

Ejercicio 12

Sabemos que la suma de los ángulos de cualquier cuadrilátero vale 2π (lo probamos como consecuencia de que la suma de los ángulos de un triángulo vale π). Usando esto en el cuadrilátero formado por las cuatro rectas obtenemos

$$\hat{A} + (\pi - \hat{A}) + x + (\pi - \hat{B}) = 2\pi.$$

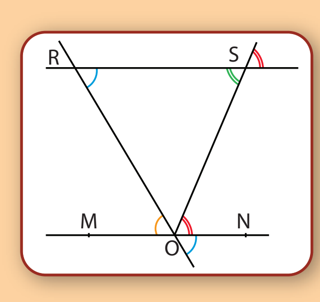
Simplificando llegamos a $x = \hat{B}$.

Ejercicio 13

Consideremos un triángulo plano ORS cualquiera y la recta (MN) definida como el transporte paralelo de (RS) a lo largo de (OR) (ver figura 2). Por definición del transporte paralelo tenemos $\widehat{MOR} = \widehat{ORS}$. Por hipotesis tenemos también $\widehat{NOS} = \widehat{OSR}$. Luego

$$\begin{aligned}\widehat{ORS} + \widehat{ROS} + \widehat{RSO} &= \widehat{MOR} + \widehat{ROS} + \widehat{SON} \\ &= \widehat{MON} \\ &= \pi.\end{aligned}$$

Ejercicio 14



Examinando los vertices C y B vemos que

$$u + u' + \hat{C} = \pi \quad \text{y} \quad u'' - u' + \hat{B} = \pi$$

es decir

$$u = \pi - u' - \hat{C} \quad \text{y} \quad u'' = \pi - \hat{B} + u'.$$

Luego

$$\begin{aligned}H &= \pi - u'' + \hat{A} - u \\ &= \pi - (\pi - \hat{B} + u') + \hat{A} - (\pi - u' - \hat{C}) \\ &= \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} - \pi.\end{aligned}$$

Ejercicio 15

Llamemos M'' a la proyección ortogonal de M sobre el plano $\boldsymbol{xy}$ y O el centro de la esfera. Si conociéramos OM'' tendríamos resuelto el ejercicio pues

$$x = OM'' \cos\varphi \quad \text{y} \quad y = OM''\text{sen}\varphi.$$

Busquemos entonces *OM"*. Como la recta (*MM"*) es paralela a la recta (*ON*) podemos aplicar el teorema de Thales en el triángulo *ONM'* para obtener

$$\frac{MM''}{ON} = \frac{M''M'}{OM'}.$$

Como

$$ON = R,$$

$$MM'' = \text{ coordenada z de M } = R\text{sen}\theta,$$

$$M''M' = OM' - OM'' = OM' - R\cos\theta.$$

tenemos

$$\text{sen}\theta = \frac{OM' - R\cos\theta}{OM'}$$

i.e.

$$OM' - R\cos\theta = OM'\text{sen}\theta \Leftrightarrow OM'(1 - \text{sen}\theta) = R\cos\theta.$$

Como habíamos supuesto que $M \neq N$, es decir, $\theta \neq \frac{\pi}{2}$, tenemos $(1 - \text{sen}\theta) \neq 0$ y luego podemos dividir en la última igualdad por $(1 - \text{sen}\theta)$. Obtenemos así

$$OM' = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)}.$$

Finalmente,

$$x = OM'' \cos\varphi = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)} \cos\varphi$$

$$y = OM''\text{sen}\varphi = \frac{R\cos\theta}{(1 - \text{sen}\theta)}\text{sen}\varphi.$$

Ejercicio 16

Examinando la figura 5.33 (ver pág. 100) vemos que la imagen por la proyección estereográfica de un meridiano (respectivamente, de un paralelo) es una recta pasando por el origen (resp., un círculo centrado en el origen) en el plano *xy*. Vamos a probarlo analíticamente usando el resultado del ejercicio anterior.

Una mitad de meridiano está formado por los puntos de coordenada φ constante, es decir, es un conjunto de la forma $\left\{(\theta,\varphi), -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \varphi = \varphi_0\right\}$ por algún $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ (la otra mitad tiene por ecuación $\varphi = \varphi_0 + \pi$). Luego si $\cos\varphi_0 \neq 0$,

$$y = \frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)}\text{sen}\varphi_0 = \frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)}\cos\varphi_0\frac{\text{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0} = \frac{\text{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0}x.$$

Esta ecuación es la ecuación de una recta que pasa por el origen pues es de la forma $y = ax$ con $a = \frac{\text{sen}\varphi_0}{\cos\varphi_0}$. Si $\varphi_0 = 0$ i.e. $\varphi_0 = \pm\frac{\pi}{2}$ entonces

$$x = \frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)}\cos\varphi_0 = 0,$$

y

$$y = \frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)}\text{sen}\varphi_0 = \pm\frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)},$$

con $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$. Como la función $f(\theta) = \frac{R\cos\theta}{(1-\text{sen}\theta)}$, $-\frac{\pi}{2} \le \theta < \frac{\pi}{2}$, es continua y creciente (pues $f(\theta) = \frac{R}{1-\text{sen}\theta} > 0$), $f(-\pi/2) = 0$, $\text{lím}_{\,\theta\to\pi/2} f(\theta) = +\infty$, es una biyección de $[-\pi/2, \pi/2)$ sobre $[0,+\infty)$. Luego, la imagen de una mitad de meridiano con $\cos\varphi_0 = 0$ es la parte positiva (respectivamente, negativa) del eje y si $\varphi_0 = \pi/2$ (respectivamente, si $\varphi_0 = -\pi/2$), y la imagen del meridiano completo es todo el eje y.

Probamos ahora que la imagen de un paralelo es un círculo centrado en el origen, es decir, un conjunto de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ para algún $r > 0$ (el radio del círculo).

Un paralelo tiene por ecuación $\theta = \theta_0$ por algún θ_0 $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$. Luego,

$$\begin{aligned} x &= \frac{R\cos\theta_0}{(1-\text{sen}\theta_0)}\cos\varphi \\ &= r\cos\varphi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{R\cos\theta_0}{(1-\text{sen}\theta_0)}\text{sen}\varphi \\ &= r\text{sen}\varphi, \end{aligned}$$

donde $\frac{R\cos\theta_0}{(1-\text{sen}\theta_0)}$ es una constante que depende de θ_0, y $\varphi \in [0, 2\pi)$. Entonces,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2(\cos^2\varphi + \text{sen}^2\varphi) \\ &= r^2. \end{aligned}$$

Luego, la imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el círculo centrado en el origen de radio $r = \frac{R\cos\theta_0}{(1-\text{sen}\theta_0} = f(\theta_0)$. Como la función f es creciente con $f(-\pi/2) = 0$ y $\text{lím} f(\theta)_{\theta\to\pi/2} = +\infty$,

el radio del círculo crece desde 0 cuando $\theta_0 = -\pi/2$ (el círculo en este caso se reduce al polo sur de la esfera) y va tomando valores más y más grandes a medida que θ_0 se acerca a $\pi/2$.

Ejercicio 17

La coordenada y de M' se encuentra de la misma manera que la coordenada z de las coordenadas esféricas. La coordenada x es por definición la longitud de un arco de círculo de radio R y ángulo φ. Como medimos los ángulos en radianes, obtenemos $x = R\varphi$.

Ejercicio 18

La imagen del paralelo de ecuación $\theta = \theta_0$ es el segmento horizontal

$$-R\pi \leq x \leq R\pi, \quad y = Cste$$
$$= R\log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta_0}{2}\right).$$

La imagen del meridiano de ecuación $\varphi = \varphi_0$ es la recta vertical

$$x = R\varphi_0$$

pues cuando θ recorre el intervalo $(-\pi/2, \pi/2)$, $y = R \log \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)$ recorre todo $\mathbb{R}$.

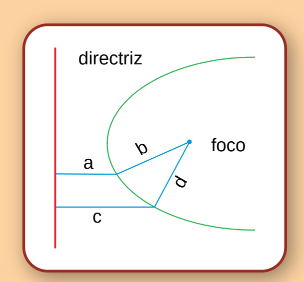
Ejercicio 19

Si el bote hace un ángulo constante con los meridianos, entonces su recorrido sobre una mapa obtenida con la proyección de Mercator hace también un ángulo constante con las rectas verticales (pues la proyección de Mercator conserva los ángulos por construcción y la imagen de un meridiano es una recta vertical como ya vimos). Entonces, el recorrido es una recta pues en ningún momento cambia la dirección de su movimiento.

Capítulo 6

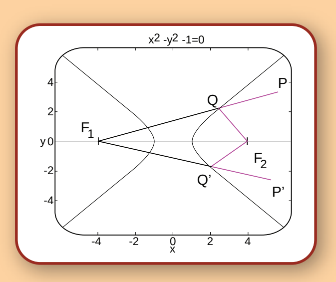
Ejercicio 1

a) La parábola se define como el conjunto de puntos cuya distancia a un punto fijo (foco) es igual a la distancia a una recta fija (directriz). En el gráfico, las distancias a y b son iguales entre sí; lo mismo que las distancias c y d.



La hipérbola se define como el conjunto de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

Antes de pasar a las expresiones analíticas de estas cónicas veamos una de las aplicaciones inmediatas de estas definiciones: una variante del método del jardinero para el trazado de una hipérbola.



Se necesitan una regla, un hilo y un lápiz. La regla se apoya sobre el papel con un extremo fijo al mismo. El hilo también está fijo al papel y al otro extremo de la regla. Para dibujar una hipérbola basta con sostener el hilo tenso contra la regla con el lápiz y hacer girar la regla. En la figura, nuestra regla estaría representada en dos posiciones P y P' (con el extremo fijo en F_1), el lápiz estaría en Q y Q' respectivamente y el hilo recorrería el camino magenta en ambos casos.

O sea que los puntos P y P' se encuentran a la misma distancia de F_1 ya que la regla tiene una longitud fija y tenemos:

$$PF_1-QF_1=QP \qquad y \qquad P'F_1-Q'F_1=Q'P'$$

Entonces

$$PF_1 = QP + QF_1 \qquad y \qquad P'F_1 = Q'P' + Q'F_1$$

$$QP+QF_1 = Q'P'+Q'F_1$$

$$QF_1 = Q'P'-QP+Q'F_1$$

Si Q y Q' están en una hipérbola entonces se tiene que cumplir que:

$$QF_1- QF_2 = Q'F_1- Q'F_2 = \text{constante}$$

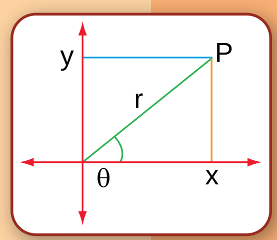
Pero esto vale porque

$$QF_2 = PF_2-QP \qquad y \qquad Q'F_2 = P'F_2-Q'P'$$

$$\begin{aligned} QF_1 - QF_2 &= Q'P'-QP+Q'F_1 - QF_2 \\ &= Q'P'-QP+Q'F_1-(PF_2-QP) \\ &= Q'P' + (P'F_1 – Q'P') –PF_2 \\ &= Q'F_1- Q'F_2 \end{aligned}$$

Como queríamos ver.

b) Dado un punto en el plano, las coordenadas polares r, θ representan su distancia al origen y el ángulo que forman con el eje de abscisas.



Se cumplen entonces las relaciones:

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$



que nos servirán para pasar las expresiones que obtengamos en coordenadas polares a coordenadas cartesianas.

Ecuación para la parábola:

Sea P un punto de la parábola de coordenadas r y θ, por lo tanto cumple que las distancias OP y PD son iguales.

Del gráfico obtenemos que

$$PD = PE + ED$$

O sea, usando las coordenadas polares

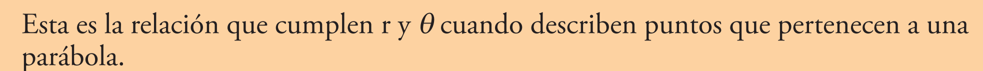
$$r = r\cos\theta + \rho$$



Despejando queda

$$r\,(1 - \cos\theta) = \rho$$

$$r = \frac{\rho}{1 - \cos\theta}$$



Esta es la relación que cumplen r y θ cuando describen puntos que pertenecen a una parábola.

En general, se tiene la ecuación general de una cónica es

$$r = \frac{\rho}{1 - \varepsilon\cos\theta}$$

Donde ε se dice la excentricidad de la cónica. Existen variaciones sobre esta ecuación que corresponden a la orientación de la figura.

Esto corresponde a una forma más general aún de definir a las cónicas de una forma métrica.

Dada una recta directriz L y un foco F una cónica es el conjunto de puntos P que cumplen la relación

$$PF = \varepsilon \, PL$$

Donde PD representa la distancia de P a la recta L

Si $\varepsilon>1$ se define una hipérbola; si $\varepsilon=1$, es el caso de la parábola ya visto y si $0<\varepsilon<1$ se obtiene una elipse.

Veamos ahora que forma toma esta ecuación general en coordenadas cartesianas

Para eso notemos que

$$\cos\theta = x/r$$

Reemplazando

$$r = \frac{\rho}{1-\varepsilon \frac{x}{r}} = \frac{r \ \rho}{r-\varepsilon x}$$

Entonces, cancelando r y despejando queda

$$r-\varepsilon x = \rho$$
$$r = \rho+\varepsilon x$$

Elevando al cuadrado ambos miembros

$$r^2 = (\rho+\varepsilon x)^2$$

Usando Pitágoras tenemos

$$r^2 = y^2 + x^2$$

Por lo tanto, nuestra ecuación queda

$$y^2 + x^2 = (\rho+\varepsilon x)^2$$

$$(1-\varepsilon^2)\, x^2 + y^2 - 2\rho\varepsilon x - \rho^2 = 0$$

como queríamos ver.

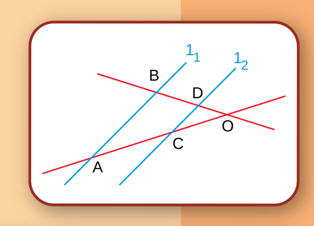
Ejercicio 2

La propiedad que queremos demostrar en realidad se trata de una reformulación del teorema de Thales y su recíproco.

Teorema de Thales

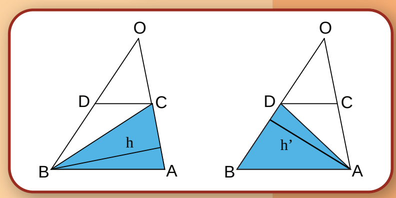
Si ℓ_1 y ℓ_2 son paralelas $\frac{OD}{BD} = \frac{OC}{CA}$ entonces,

lo que además estamos asegurando es que vale la vuelta.



Para demostrar todo esto vamos a mirar los triángulos AOB y COD.

Dentro del triángulo AOB consideramos los triángulos BCA y BDA; dado que tienen la misma altura y base, su área es la misma. Por lo tanto, las áreas restantes que corresponden a los triángulos BOC y DOA también son iguales.



Entonces

$$\frac{AC.h}{2} = \frac{DB.h'}{2} \qquad\qquad \frac{OC.h}{2} = \frac{OD.h'}{2}$$

Dividiendo queda

$$\frac{\frac{OD.h'}{2}}{\frac{DB.h'}{2}} = \frac{\frac{OC.h}{2}}{\frac{AC.h}{2}}$$

O sea

$$\frac{OD}{DB} = \frac{OC}{AC}$$

Recíprocamente, si vale la relación entre segmentos llegamos a la conclusión de que las áreas amarillas deben ser iguales y por lo tanto las rectas l_1 y l_2 paralelas.

Para pasar al enunciado de nuestra propiedad usamos que

$$OC + AC = OA \qquad\qquad OD + BD = OB$$

O sea

$$OC = OA - AC \qquad\qquad OD = OB - BD$$

Entonces, como vale Thales tenemos

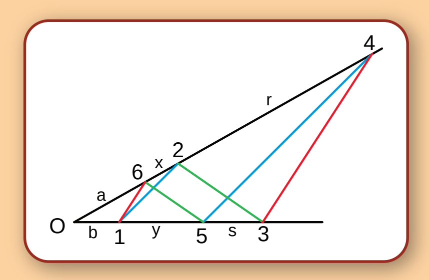
$$\frac{OC}{AC} = \frac{OA-AC}{AC} = \frac{OA}{AC} -1 = \frac{OB}{BD} -1 = \frac{OB-BD}{BD} = \frac{OD}{BD}$$

$$\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$$

Y vale nuestra propiedad

Ejercicio 3

Como hicimos en la demostración del teorema de Desargues, podemos suponer que los puntos P y Q son ideales y, por lo tanto, basta con ver que R también es un punto ideal.



Como P y Q están en el infinito, las rectas 2-3 y 5-6 (en verde) son paralelas, así como las 1-2 y 4-5 (en azul). Veamos que también los son las rectas 1-6 y 3-4(en magenta).

Volveremos a usar la misma propiedad sobre paralelas que en el teorema de Desargues.

Sean a, b, x, y, r y s las distancias entre O y 6, O y 1, 6 y 2, 1 y 5, 2 y 4 y 5 y 3 respectivamente.

Entonces se cumple que

$$\frac{a}{a+x} = \frac{b+y}{b+y+s} \qquad \frac{b}{b+y} = \frac{a+x}{a+x+r}$$

Si dividimos ambas ecuaciones y operamos queda

$$\frac{a}{a+x+r} = \frac{b}{b+y+s}$$

Y de vuelta, esto nos dice que 16 y 34 son rectas paralelas.

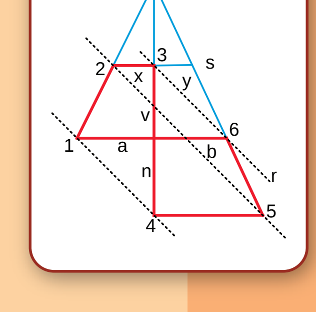
Ejercicio 4

En este caso queremos ver que tres rectas pasan por un punto, el caso más sencillo de demostrar es cuando ese punto es ideal. O sea las tres rectas serán paralelas.

Tomemos dos de esas rectas, se intersecan en algún punto. Mandemos ese punto y el punto P al infinito, entonces tendremos dos rectas paralelas. Para ver que la tercer recta es concurrente con las otras dos basta con probar que es paralela a alguna de ellas.

Como dijimos, podemos considerar P y en el infinito y que las rectas 1-4 y 3-6, por ejemplo, son paralelas.

Como 1-4 y 5-6 son paralelas tenemos $\frac{a}{b} = \frac{u}{v}$



Pero como además consideramos a P en el infinito nos quedaron paralelas 2-3, 1-6 y 4-5, entonces tenemos

$$\frac{x}{y} = \frac{a}{b} \qquad \frac{u}{v} = \frac{r}{s}$$

Y por lo tanto

$$\frac{x}{y} = \frac{r}{s}$$

Con lo que las rectas 2-5 y 3-6 son paralelas, como queríamos ver.

Capítulo 7

Ejercicio 1

En esta sección resolveremos, paso por paso, el ejercicio propuesto al final del capítulo. Según mencionamos, al tratarse de un poliedro simple entre cuyas caras no hay triángulos o cuadriláteros, vale $C_3 = C_4 = 0$, y en consecuencia la fórmula que resulta ahora es:

$$5C_5 + 6C_6 + \ldots + NC_n = 2A.$$

Por otro lado, dijimos que todos los vértices son tríadas y entonces

$$3V = 3V_3 = 2A.$$

Siguiendo la sugerencia, vamos a escribir la fórmula de Euler-Descartes como $14C - 4A + 14V - 10A = 28$, vale decir:

$$14C_5 + 14C_6 + \ldots + 14C_n - 2 \cdot (5C_5 + 6C_6 + \ldots + NC_n) + 14V - 5 \cdot 3V = 28.$$

Reagrupando los términos, se obtiene:

$$(14 - 10)C_5 + (14 - 12)C_6 + (14 - 14)C_7 + \ldots (14 - 2N)C_n = 28 + V,$$

de donde resulta

$$4C_5 + 2C_6 \geq 28 + V.$$

Ahora podemos imaginar que a cada ángulo de cada cara del poliedro le asignamos un valor fijo, por ejemplo 1. De esta forma, la suma total de los valores de todos los ángulos es $3V$, pues en cada vértice concurren exactamente tres aristas (y en consecuencia, se forman exactamente tres ángulos).

Supongamos ahora que no hay dos pentágonos contiguos: en tal caso, la cantidad de vértices que pertenecen a una cara pentagonal es $5C_5$, pues no hay vértices "repetidos". Esto dice que dichos vértices aportan, a la suma total, un valor igual a tres veces la cantidad $5C_5$, es decir: $15C_5$. Si además ningún hexágono toca a un pentágono, entonces cada uno de los ángulos de las caras hexagonales aporta por lo menos 1 a la suma total, con lo que resulta

$$3V \geq 15C_5 + 6C_6 \geq 3(4C_5 + 2C_6) \geq 3(V + 28) > 3V,$$

lo que es absurdo. Esto prueba que alguna de las dos suposiciones que hicimos es falsa: en otras palabras, o bien hay pentágonos contiguos, o bien algún hexágono toca a algún pentágono.

Capítulo 8

Ejercicio 1

Calcule $1/cos(87°)$, y $1/cos(89,853°)$. ¿Son muy diferentes?

Utilizando una calculadora tenemos $cos(87°) = 0{,}0523$, $cos(89,853°) = 0{,}0025$. Por lo tanto, $1/cos(87°) = 19{,}1$, y $1/cos(89,853°) = 389,8$.

Ejercicio 4

Recordemos las relaciones que hemos obtenido:

$$\begin{aligned} (i) \quad & D = 390 \cdot d \\ (ii) \quad & r = 110 \cdot d \\ (iii) \quad & R = 110 \cdot D \end{aligned}$$

Supongamos que conocemos D. Utilizando la ecuación (i), averiguamos r; ahora, gracias a (ii), averiguamos r; finalmente, utilizando (iii), calcularmos R.

Si conocemos r, la ecuación (ii) nos permite averiguar d; conociendo d, averiguamos D con (i), y finalmente, como averiguamos D, despejamos R de (iii).

Por último, si conocemos R, con la ecuación (iii) calculamos D; reemplazamos D en (i) y tenemos d, y finalmente, con la ecuación (ii) calculamos r.

Bibliografía

La siguiente lista, lejos de ser exhaustiva, es apenas un punto de partida para profundizar los temas del texto. En particular, en algunos libros hay al final un número entre corchetes, que indica el capítulo al cual amplía o sirve de referencia.

Aubrey, J. *A Brief Life of Thomas Hobbes, 1588-1679*. En: Oliver L. Dick (ed.), *Aubrey's Brief Lives*. Nonpareil Books (1957).[7]

Ayres, F. *Teoría y problemas de trigonometría plana y esférica*. Schaum's outline series. México, McGrawHill. (1979). [5]

Coxeter, H.S.M. *Introduction to geometry*, John Wiley and Sons, (1989)

Euclides *The Thirteen Books of The Elements* (por Thomas L. Heath) Dover (1956)

Henderson, *Experiencing geometry in euclidean, spherical and hyperbolic spaces*, 2nd edition, Prentice Hall. [5]

Kazarinoff, N. D. *Geometric Inequalities*, The Mathematical Association of America, (1983).

Kuhn, T. *La revolución copernicana*. Ed. Orbis S.A., Hyspamérica, (1978). [8]

Lebesgue, H. *Quelques conséquences simples de la formule d'Euler*. J. Math. Pures et Appl. 19, (1940), 27-43. [7]

Levi. B. Leyendo a Euclides, Libros del Zorzal, Buenos Aires (2000). [2]

Platón, *Timeo*. Ed. Colihue, Buenos Aires (1999). [7]

Poincaré, H. *Últimos pensamientos*. Ed. Espasa Calpe Argentina, Buenos Aires (1946). [7]

Puig Adam, P. *Curso de geometría métrica. I, Fundamentos. II, Complementos*. Madrid, (1973).

Santaló, L. Geometrías *no euclidianas*, Eudeba, (1969). [6]

En la web:

http://www.euclides.org/menu/elements_esp/indiceeuclides.htm *[2]*

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html *[2]*

www.ilusionario.es *[6]*

http://torus.math.minc.edu/jms/java/dragsphere/